Latin American Journal of Science Education
www.lajse.org

Esquema sobre la distribución de calor en una varilla, cuando un extremo se encuentra a temperatura diferente de cero

Tapia Toscano Saulo[a], Baidal Bustamante Eduardo[b]
[a] Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Admisión, Campus Gustavo Galindo Km 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.
[b] Instituto Politécnico Nacional - CICATA, Calz. Legaria 694, Col. Irrigación, 11500 Ciudad de México, CDMX, México

ARTICLE INFO

Received: August 15, 2019
Accepted: September 20, 2019
Available on-line: June 6, 2020

Keywords: transmisión del calor, ecuaciones diferenciales, aislantes.

E-mail addresses:
stapiat@hotmail.com.,
ebaidal@hotmail.com

ISSN 2007-9842

ABSTRACT

The present document contains the conceptualization of a scheme on the transmission of heat in a metallic rod, by means of differential equations. It should be emphasized that heat transmission is subject to conditions such as initial temperature (not always zero), obtaining insulating factors in the positions of the rod. The solution consists in the middle of the method of separation of variables, obtaining a mathematical expression that has as functions: position and time.

El presente documento contiene la conceptualización de un esquema sobre la transmisión del calor en una varilla metálica, mediante ecuaciones diferenciales. Se debe enfatizar que la transmisión del calor está sujeto a condiciones como: temperatura inicial (no siempre cero), la obtención de aislantes en determinadas posiciones de la varilla. La solución consiste en por medio del método de separación de variables, obtener una expresión matemática que tenga como funciones: posición y tiempo.

I. INTRODUCCIÓN

El calor es una forma de energía que se transfiere de una región con mayor temperatura hasta otra con menor temperatura, la dirección del calor es única y no permite variante alguna. Hasta las 2 primeras décadas del siglo XIX estuvo presente el uso del calórico, sustancia que era la responsable de producir el calor en un cuerpo; el mismo que indicaba: si un cuerpo tenía mayor temperatura, cedía parte de su calórico a otro de menor temperatura, al ponerse en contacto ambos. Si bien es cierto, la teoría del calórico explicaba algunas situaciones de la transferencia de calor, los experimentos realizados en esa época por el físico B. Thompson y el químico H. Davy sugerían que el calor correspondía a energía en tránsito. A mediados del mismo siglo, otro físico inglés, James Prescott Joule, tras una serie de experimentos demostró de manera contundente que el calor es una transferencia de calor (equivalente mecánico del calor). Estos y otros descubrimientos fueron los detonantes para la formación de la termodinámica.

II. MARCO TEÓRICO

El calor es una forma de energía y puede transferirse básicamente por tres procesos: *conducción, convección y radiación*. En la naturaleza, todas las formas de transmisión intervienen simultáneamente con distintos grados de relevancia.

Conducción. Cuando se desea atizar el fuego de carbones encendidos en un fogón, se nota que a través del atizador se comunica calor hasta el extremo en que se sujeta el objeto y que es el más frío; este se calienta. Esta observación demuestra que el calor se conduce a través de la varilla. La propagación del calor a través de la conducción se caracteriza por:

- la existencia de un *medio material* a través del cual se propaga el calor
- La transmisión del calor *sin transporte de materia*.

La conducción del calor en muchos materiales puede visualizarse como resultado de los choques moleculares, como en el caso de líquidos y gases, o movimiento de electrones o vibraciones de la red cristalina, como el caso de los sólidos. Al chocar las moléculas calientes (más rápidas) con sus vecinas frías, más lentas, les transfieren cierta cantidad de su energía, dando como resultado que la velocidad de las vecinas aumenta también. Así, la energía asociada al movimiento térmico se propaga (conducción). Lo mismo puede decirse para los sólidos respecto del movimiento de los electrones o las vibraciones de la red cristalina (movimiento de fonones).

Como consecuencia del segundo principio de la termodinámica, calor siempre se propaga de la zona caliente a las zonas frías.

La ecuación del calor es una importante ecuación diferencial en derivadas parciales que describe la distribución del calor (o variaciones de la temperatura) en una región a lo largo del transcurso del tiempo. Para el caso de una función de tres variables en el espacio (x,y,z) y la variable temporal t, la ecuación del calor es:

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{1}$$

El presente documento analizará solamente la transmisión de calor en una varilla, para lo cual se aplicará la ecuación de calor unidimensional:

$$\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial t}$$

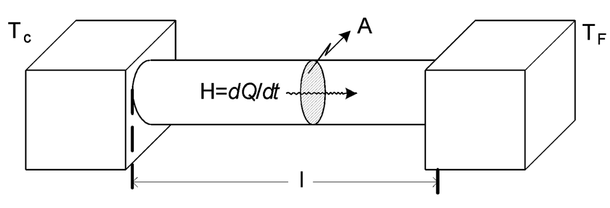

FIGURA 1. Muestra el flujo de calor, desde una región más caliente hasta una región fría.

Donde α es la difusividad térmica, que es una propiedad del material.

La ecuación del calor, si bien es cierto, es una expresión única, pero puede ser analizado desde diferentes puntos de vista en los diversos campos de la ciencia. En las matemáticas, son las ecuaciones parabólicas en derivadas parciales. En estadística, la ecuación del calor está vinculada con el estudio del movimiento browniano a través de la ecuación de Fokker–Planck. La ecuación de difusión, es una versión más general de la ecuación del calor, y se relaciona principalmente con el estudio de procesos de difusión química.

II. ESQUEMA

Normalmente el esquema para resolver ejercicios de distribución de calor es:

Sean las condiciones:

$u(0,t) = 0$

$u(L,t) = 0$

$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$

Tómese en cuenta que las condiciones de fronteras son cero y el método a utilizar es el de separación de variables

En base al formato: $\alpha \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial U}{\partial t}$, definir 2 funciones: X(x) y T(t)

$\downarrow$

Expresar X como la segunda derivada

$\downarrow$

Expresar T como la primera derivada

$\downarrow$

Dejar expresado cada término solo con variables propias

$\downarrow$

Comparar la expresión obtenida con λ^2

$\downarrow$

Se consigue una solución son senos y cosenos: $X(x)= C_1\cos(\lambda x)+C_2\operatorname{sen}(\lambda x)$

$\downarrow$

La expresión X, evaluar con las condiciones de fronteras, $C_1=0$ y se obtiene el valor de λ

$\downarrow$

La expresión T tiene como solución: Ae^{rt}

$\downarrow$

Reemplazar en $T' + \alpha\lambda^2 T$, se define T(t)

$\downarrow$

Se define U(x,y)= X(x)T(t)

↓

Como la función U(x,y) depende de n, se puede expresar como una sumatoria $\mu(x,y)$

↓

Se evalua la condición inicial $\mu(x,0)$; y se compara con la serie de Fourier para obtener bn y así la función $\mu(x,t)$ final

Pero si las condiciones de fronteras son diferentes de cero, se debe realizar un artificio, crear una función V(x,t) (por facilidad que sea lineal) que cumpla con las condiciones de fronteras dadas. Luego se procede a realizar la operación:

$$W(x,t) = U(x,t) - V(x,t)$$

Se repite todo el proceso, trabajando ahora con W(x,t); la función que de obtiene será $\omega(x,t)$, pero como lo que deseamos es $\mu(x,y)$, entonces realizamos la operación:

$$\mu(x,t) = \omega(x,t) + V(x,t)$$

Ejemplo: Sea una varilla cuyos extremos se encuentran a 0º C y el otro a 120º C y $\alpha=2$

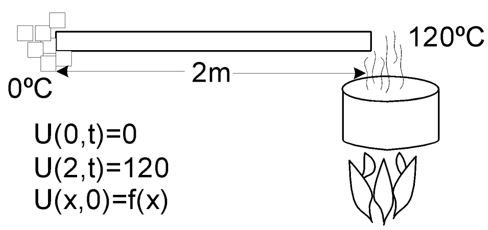

FIGURA 2. Ejemplo de distribución de calor en una varilla

Para evitar las condiciones de fronteras diferentes de cero, se crea una nueva función V(x,t) = ax + b;

x = 0; U(0)= 0 0 = a(0) + bpor lo tanto b= 0

x= 2; U(2)=120 120= a(2) por lo tanto a=60

V(x,t) = 60x

W(x,t)= U(x,t) – V(x,t)

W(0,t)= 0

W(2,t)= 0

W(x,0)= –59x

$$\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$W(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = X''T \qquad ; \qquad \frac{\partial WT'}{\partial t}$$

$$\frac{2X''T}{2XT} = \frac{XT'}{2XT}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{2T} = -\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 sen(\lambda x)$$

$$X(0) = C_1 \cos(0) + C_2 sen(0) = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$por\ lo\ \tan to:\ \ X(x) = C_2 sen(\lambda x)$$

$$X(2) = C_2 sen(2\lambda) = 0$$

$$2\lambda = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{2}$$

$$X(x) = C_2 sen(\frac{n\pi}{2} x)$$

$$\frac{T'}{2T} = -\lambda^2$$

$$T' + 2\lambda T = 0$$

$$T(t) = Ae^{rt}$$

$$T' = Are^{rt}$$

$$Are^{rt}+2\lambda^2Ae^{rt}=0$$

$$Ae^{rt}(r+2\lambda^2)=0$$

$$r=-2\lambda^2$$

$$t(t)=Ae^{-2\lambda^2}$$

$$W(x,t)=X(x)T(t)$$

$$W(x,t)=C2sen(\frac{n\pi}{2}x)Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}$$

$$\omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Csen(\frac{n\pi}{2}x)Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}$$

$$\omega(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Csen(\frac{n\pi}{2}x)Ae^{0}$$

comparando con la serie de Fourier

$$bn=\frac{2}{L}\int f(x)sen(\frac{n\omega}{2}x)$$

$$bn=\int_0^2-59x\cdot sen(\frac{n\omega}{2}x)dx\Rightarrow u=x\quad dv=sen(\frac{n\omega}{2}x)dx$$

$$du=dx\quad v=-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\omega}{2}x)$$

$$bn=-59\left[-\ \Big|_0^2\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos(\frac{n\pi}{2}x)dx\right]$$

$$bn=59\left[\frac{4}{n\pi}\cos(2n\pi)-\frac{2}{n^2\pi^2}\ \Big|_0^2sen(\frac{n\pi}{2}x)\right]$$

$$bn=59\left[\frac{4}{n\pi}-\frac{1}{n^2\pi^2}sen(n\pi)\right]$$

$$bn=\frac{236}{n\pi}$$

$$\omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{236}{n\pi}sen(\frac{n\pi}{2}x)Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}$$

Se ha obtenido la función $\omega(x,t)$; pero lo que se desea es la función $\mu(x,t)$; por lo tanto:

$$\mu(x,t)=\omega(x,t)+V(x,t)$$

$$\mu(x,t)=60x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{236}{n\pi}sen(\frac{n\pi}{2}x)Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}$$

IV. CONCLUSIONES

Si bien es cierto esta investigación pretende ayudar en el cálculo de expresiones que indiquen la distribución del calor cuando la temperatura en uno de los extremos de una varilla es diferente de cero; es menester de los interesados el tener conocimiento de las matemáticas para culminar exitosamente.

REFERENCIAS

[1]Pitts, D. R., Sissom, L. E., *Transferencia de calor*, Series Schaum, McGraw-Hill, Bogotá, 1979.
[2] Zemansky, M., *Calor y termodinámica*, Aguilar, Madrid, 1993.
[3]Curso 2º Ingeniero de telecomunicación., <www.personal.us.es/contreras/t06edp.pdf >
[4] <https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_del_calor> Consultado el 18 de Septiembre de 2018.