



## Estudiando funciones racionales con Excel en estudiantes de nivel medio superior

Elvia Rosa Ruiz Ledezma<sup>a</sup>, Fermín Acosta Magallanes<sup>b</sup>, Guadalupe Yolanda Ramírez Maldonado<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Instituto Politécnico Nacional. CECyT 11 Wilfrido Massieu. Av. de los Maestros 217, Miguel Hidalgo, 11340 CDMX

<sup>b</sup>Instituto Politécnico Nacional. Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas. Av. Instituto Politécnico Nacional 2580, Gustavo A. Madero, 0740 CDMX

<sup>c</sup>Instituto Politécnico Nacional. CECyT 11 Wilfrido Massieu. Av. de los Maestros 217, Miguel Hidalgo, 11340 CDMX

### ARTICLE INFO

**Received:** September 8, 2017

**Accepted:** October 16, 2017

**Available on-line:** November 1, 2017

**Keywords:** Instrumental actions, rational functions, semiotic representation registers

**E-mail addresses:**

[ruizelvia@hotmail.com](mailto:ruizelvia@hotmail.com)

[ferminacosta66@hotmail.com](mailto:ferminacosta66@hotmail.com)

[guyorama16@gmail.com](mailto:guyorama16@gmail.com)

ISSN 2007-9842

© 2017 Institute of Science Education.

All rights reserved

### ABSTRACT

In this research the application of educational engineering with Excel for teaching rational functions in senior high students addressed. The activities were applied to youths fifth semester of one of the Centros de estudios Científicos y Tecnológicos of the Instituto Politécnico Nacional in Mexico City. The theory of semiotic representation systems in conjunction with the theory of instrumentation was used for the analysis of responses. The answers obtained allow us an idea of the concepts that are building students.

### RESUMEN

En esta investigación se aborda la aplicación de una ingeniería didáctica con Excel, para la enseñanza de funciones racionales en estudiantes de nivel medio superior. Las actividades fueron aplicadas a jóvenes de quinto semestre de uno de los Centros de estudios Científicos y Tecnológicos pertenecientes al Instituto Politécnico Nacional, en la Ciudad de México. Para realizar el análisis de las respuestas se utilizó la teoría de los sistemas semióticos de representación en conjunción con la teoría de la aproximación instrumental, documentando la necesidad de instrumentaciones como un medio para el aprendizaje. Las respuestas obtenidas permiten darnos una idea de los conceptos que van construyendo los alumnos.

## I. INTRODUCCIÓN

Cuando hablamos sobre el uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, tenemos presente una gran cantidad de trabajos, donde se utilizan diversas teorías de la Matemática Educativa (ME). Inicialmente los investigadores apostaron a la potencialidad de las herramientas tecnológicas, dejando de lado las fundamentaciones teóricas, posteriormente las investigaciones apuntaron a cuestiones de visualización y conexión entre los diferentes registros de representación (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010). En el presente siglo y hasta la fecha con la construcción teórica de la aproximación instrumental, se ha profundizado sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas, no siendo solamente adaptaciones de actividades en lápiz y papel sino actividades encaminadas hacia la conceptualización del conocimiento (Artigue, 2002).

En este documento presentamos una ingeniería didáctica para la enseñanza de las funciones racionales con el uso de Excel, así como las construcciones que van haciendo los estudiantes al trabajarlas. Pues la hoja de cálculo es considerada por diseñadores de recursos para profesores del Instituto Universitario de Formación de Maestros en Francia, como un instrumento eficaz para el estudio de problemas funcionales, una vez instaladas las bases del lenguaje algebraico (Artigue, 2007).

Para los estudiantes de nivel medio, el aprendizaje de estas funciones representa obstáculos que se han venido estudiando, en donde se abordan conceptos asociados al de función racional, como es el caso de los conceptos de límite e infinito.

Además, dados los resultados de la prueba nacional [Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes (PLANEA)] en estudiantes de nivel medio superior se hace necesario continuar con actividades donde el estudiante construya diversos objetos matemáticos, como por ejemplo el de función racional, límite e infinito, entre otros.

## II. JUSTIFICACIÓN

Tanto las reformas educativas que se han desarrollado [Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS)], como las evaluaciones estandarizadas, nacionales e internacionales [PLANEA (Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes) y PISA (Program for International Student Assessment – Programa para la evaluación internacional de los alumnos)], han marcado la pauta para un trabajo centrado en competencias.

Las reformas se han marcado como prioritarias, solicitando que los profesores sean preparados para los nuevos modelos educativos (NME), tomando en cuenta las debilidades y fortalezas del sistema educativo. Una manera de justificar las reformas es revisando las evaluaciones tanto nacionales como internacionales, donde casi el 50% de los estudiantes se ubica en niveles de bajo desempeño en las competencias fundamentales, marcadas por los planes y programas de estudio; implicando que el sistema educativo no ha fortalecido el potencial de los jóvenes para hacer de ellos ciudadanos productivos y competitivos.

Así mismo, consideramos, la actuación de los profesores en el aula, donde los NME, requieren que el alumno desarrolle competencias, así como el logro de aprendizajes significativos para una formación integral. Por lo que, desde un punto de vista técnico los profesores deben conocer todas las funciones que ofrecen los recursos, incluyendo los tecnológicos, así como los requerimientos de la evaluación por competencias, con sus respectivos materiales.

En el contexto institucional, similarmente se está trabajando el modelo educativo por competencias; particularmente en los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), donde el nivel de competencias se establece en el acuerdo 444, que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. Las competencias se clasifican en: genéricas, disciplinares y profesionales. Se establecen ocho competencias genéricas, a lo largo de todo el plan de estudios.

Dentro de las competencias genéricas con sus respectivos atributos se menciona, la competencia:

-Se expresa y comunica. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.

Atributos:

-Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

-Maneja las tecnologías de la información y la comunicación, para obtener información y expresar ideas.

Así nos percatamos, en este marco se incluye la utilización de los medios tecnológicos.

## III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Nuestro marco de referencia está formado por la teoría de la aproximación instrumental y la teoría de los sistemas semióticos, en el sentido amplio de la semiótica, donde no solo se incluyen los registros de representación, se consideran además los gestos, las miradas, los señalamientos y en general toda forma de expresión utilizada por alumnos y profesores en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Respecto a los distintos tipos de signos, que incluye la semiótica clásica, Azarello (2006) afirma, que las definiciones clásicas de semiótica no son pertinentes para la investigación de los fenómenos didácticos en el aula, pues además de los recursos semióticos lenguaje o escritura, se observan otros, que se consideran relevantes como son los gestos, las miradas, los señalamientos y en general toda forma de expresión utilizada por alumnos y profesores en las tareas de enseñanza-aprendizaje.

La idea de mediación semiótica nos conduce al uso de instrumentos, que van de lo concreto a lo abstracto en la construcción del conocimiento, considerados así, debido a su funcionamiento que los vincula a una actividad significativa. Actualmente esta consideración del uso de un instrumento como mediador semiótico en la producción de conocimiento matemático, resulta muy productiva en variadas investigaciones, especialmente en las que se utilizan computadoras.

La aproximación instrumental en educación matemática surge en el contexto francés, de la ingeniería didáctica, la teoría de las situaciones didácticas y la teoría antropológico de la didáctica. En un inicio la aproximación instrumental fue aplicada, principalmente en ambientes tecnológicos como los CAS (sistemas algebraicos computarizados), utilizados por estudiantes y profesores, pero que no fueron diseñados con un propósito educativo (Trouche y Drijvers 2014). Inicialmente, la teoría toma tres ideas esenciales desde la ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1999).

1.- La distinción entre un artefacto y un instrumento: un artefacto es un objeto material o abstracto, un producto de la actividad humana y es usado por un sujeto para transformar un tipo de tarea. Un instrumento es lo que el sujeto construye desde el artefacto.

2.- El reconocimiento de que la apropiación de un artefacto y la construcción de un instrumento es un proceso complejo, llamado génesis instrumental, en el cual una nueva entidad ha nacido.

3.- La comprensión de que la génesis instrumental no es un proceso simple, que envuelve dos componentes, llamados:

-Instrumentación, dirigido hacia el sujeto; en el que se generan esquemas de acción; es decir habilidades de aplicación de la herramienta para la realización de tareas significativas que a su vez se transforman en técnicas (Gómez, 2009) que permiten respuestas efectivas a actividades matemáticas.

-Instrumentalización, dirigido hacia el artefacto; en el que el sujeto lo transforma y adapta a sus necesidades y circunstancias.

En esta investigación, con el uso de actividades y las manifestaciones de los estudiantes en acciones instrumentadas, nos referimos al uso de los signos en la construcción de significados, donde la mediación semiótica apoyada en instrumentos (EXCEL y computadora) es la actividad que permite, cambiar de lo específico y particular a lo general y matemático.

#### **IV. METODOLOGÍA**

La formulación de las actividades giró en torno al modelo propuesto en el contexto Ingeniería didáctica. Este término designa un conjunto de actividades de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una determinada población de estudiantes (Douady, 1995).

Particularmente en esta investigación utilizamos exclusivamente las etapas de la ingeniería didáctica:

-Contexto escolar.

- Objetos de estudio.
- Selecciones matemáticas y sus justificaciones.
- Las competencias y las herramientas.
- Las variables del problema.

#### IV.1 Contexto escolar

La investigación se realizó en el nivel medio superior CECyT 11 (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos Wilfrido Massieu), perteneciente al Instituto Politécnico Nacional. Los estudiantes se encontraban cursando la materia de cálculo. Sus antecedentes matemáticos eran un curso de álgebra elemental, geometría y trigonometría, geometría analítica y en el curso de cálculo habían estado en contacto con los objetos matemáticos: funciones, límites y la derivada.

#### IV.2 Los objetos de estudio

En el registro gráfico el estudio aborda la representación gráfica de funciones racionales, tratando de establecer relaciones con sus comportamientos, haciendo uso de la computadora y el programa, interactuando con los otros registros.

En el registro numérico, la investigación versa sobre el comportamiento numérico de las funciones racionales, intentándose establecer la relación con los registros gráfico y analítico.

En el registro algebraico, el estudio se aboca a la representación algebraica de la función, tratando de evidenciar el tipo de comportamientos que presenta.

#### IV.3 Las selecciones matemáticas y sus justificaciones

En términos algebraicos se presenta la función racional, a continuación, solicitamos el llenado de una tabla que el estudiante introducirá en una hoja de Excel, para posteriormente graficarla, observando el comportamiento que presenta la función alrededor de un número, sucesivamente se le insta a que encuentre los comportamientos restantes.

En términos numéricos presentamos una tabla, donde se encuentran concentrados algunos puntos que pertenecen a la función propuesta, con la idea de que el estudiante al introducir los valores en una hoja de Excel observe el comportamiento gráfico, pudiendo así construir la asíntota horizontal en el contexto algebraico, es decir expresarla específicamente con la notación algebraica de la función.

En términos gráficos, mostramos la gráfica de una función explícitamente señaladas las asíntotas, además se proporciona una tabla, para evitar errores de apreciación visual, esta le servirá al estudiante para verificar la correcta representación, algebraica de la función.

#### IV.4 Las competencias

Competencias que supuestamente deben poseer los estudiantes

##### *Registro algebraico*

- Sustituir los valores numéricos de la expresión algebraica y calcular su valor.
- Reducir una suma algebraica a una notación de fracción.
- Expresar por lo menos algebraicamente los límites cuando  $x$  tiende a un determinado número y cuando tiende hacia el infinito positivo y negativo.

##### *Registro gráfico*

- Trazado de ejes y graduación.
- Ubicar puntos dadas las coordenadas.
- Leer las coordenadas de puntos dados sobre la gráfica.

-Graficación de funciones polinomiales, principalmente de primero y segundo grado.

#### *Registro numérico*

-Calcular correctamente con enteros, decimales y fracciones.

-Lectura e interpretación de tablas.

-Reconocimiento de patrones.

Las herramientas

#### *Conceptuales*

-Las nociones subyacentes al concepto de función, límite e infinito.

-Los registros de representación.

#### *Tecnológicas*

-La computadora y el programa.

### **IV.5 Las variables del problema**

#### *Variables asociadas con las relaciones algebraicas*

-Expresión escrita, factorizada o desarrollada.

-La expresión algebraica que designa los comportamientos de la función.

-Los coeficientes numéricos.

#### *Variables asociadas con el registro gráfico*

-El número de puntos a marcar finito o infinito.

-La posición de los puntos a seleccionar.

-Las rectas punteadas para representar las asíntotas.

-El tamaño de la ventana de visualización.

#### *Variables asociadas con el registro numérico*

-Tratamiento pertinente de la información numérica al ser acomodado en tablas.

-Interpretación de la información numérica colocada en las tablas.

-Uso de la hoja de Excel, para el acomodo de tablas.

### **IV.6 Población participante y aplicación de las actividades**

Las actividades han sido aplicadas a estudiantes de quinto semestre CECyT 11, en tres sesiones de hora y media cada una. Los 10 alumnos participantes fueron elegidos en acuerdo a las evaluaciones escritas y al conocimiento de los profesores del grupo, se formó una pareja de alumnos de buenas calificaciones, dos parejas de alumnos de calificaciones promedio y dos parejas de alumnos con bajas calificaciones. La aplicación se llevó a cabo en un laboratorio de cómputo del CECyT. Los estudiantes, conocían el manejo de Excel, puesto que en los dos primeros semestres del nivel medio superior cursan la asignatura de computación y la hoja de cálculo se encuentra en su programa de estudios.

Se permitió que los estudiantes exploraran libremente las acciones en cada una de las actividades. Se utilizó Excel y se les autorizó el uso de internet para que las complementaran. Se esperaba que de esta manera los alumnos desarrollaran conceptos a través de las acciones instrumentadas, para averiguarlo, se videograbó y se les solicitó a todos los participantes que anotaran por completo los pasos que seguían en la actividad en papel que se les proporcionó.

#### IV.7 Descripción de la actividad 1

Cabe aclarar, se implementaron tres actividades, y en este apartado solo describiremos una de ellas.

##### *Actividad 1*

Partimos del sistema semiótico de representación algebraico, utilizando como registro auxiliar, el tabular; proponiéndonos dos objetivos:

- Construir las asíntotas verticales y horizontales como el comportamiento de la curva en los infinitos y alrededor de una  $x=c$ .
- Graficar correctamente la función  $y=f(x)$ .

En la actividad uno, a los estudiantes se les presenta una tabla, donde se concentran algunos valores para la variable  $x$ , teniendo que completarla, utilizando la expresión algebraica, a continuación, introducirán los valores en una hoja de Excel, que posteriormente graficarán, observando el comportamiento gráfico y numérico. Además, a lo largo de la actividad, se les proporcionan otras tablas para que analicen y relacionen con los comportamientos al infinito. Durante el desarrollo de la actividad, se les solicita que lleguen a utilizar una adecuada notación matemática, con el fin de que se percaten de los conceptos asociados a las funciones racionales, como son el de infinito y el de límite, primero alrededor de un valor en el dominio y segundo cuando la variable independiente  $x$ , crece en valor absoluto hacia los infinitos positivo y negativo. Es importante mencionar, en las actividades donde se solicita encontrar la expresión algebraica, la función racional que hace ciertos los puntos de la tabla no es única. Dado que se presenta un contexto numérico, el dominio no es explícito y en consecuencia se permiten discontinuidades de hueco. Por lo que el estudiante puede dar como resultado diversas funciones con las características mencionadas.

#### IV.8 Fases de resolución y análisis

##### *-Acciones*

Los estudiantes los designamos con la letra **E** mayúscula y los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Específicamente las acciones que realiza el estudiante, las clasificamos en:

- Acciones ligadas al artefacto. Cuando el alumno utiliza el teclado y el ratón, para generar, borrar, dibujar, llenar la tabla y graficar.
- Acciones percepto-gesturales. Cuando el estudiante manifiesta señalando en la pantalla sus consideraciones y cuando gesticula al hacer alguna construcción.
- Acciones de conceptualización. Cuando, al usar sus conocimientos anteriores, el estudiante construye nuevos conocimientos de acción instrumentada, manifestando con enunciados verbales y notación matemática sus conclusiones.

Las repuestas de los estudiantes las hemos categorizado en las siguientes acciones, a las que llamamos acciones instrumentadas (AI), acciones percepto-gesturales (APG) y acciones de conceptualización (AC).

AI-1 Construye la asíntota vertical.

AI-2 Construye la asíntota horizontal.

AI-3 Construye la gráfica

AI-4 Relaciona la expresión algebraica con el registro numérico.

AI-5 Relaciona el registro gráfico con el registro numérico.

AI-6 Relaciona la gráfica con la expresión algebraica

AI-7 Relaciona los registros numérico y gráfico con el registro algebraico.

AI-8 Interpreta gráficamente los límites.

AI-9 Recurre a un ambiente virtual, para complementar las preguntas de la actividad.

AI- 10 Construye la asíntota oblicua.

AI-11 Construye la expresión algebraica.

Cabe mencionar que los diálogos de las parejas de estudiantes, que mostramos a continuación los hemos señalado entre comillas y con letra cursiva, las acciones instrumentadas y acciones de conceptualización se denotan entre paréntesis y las manifestaciones percepto-gesturales de los estudiantes también las incluimos contenidas entre paréntesis rectangulares.

#### IV.9 Acciones instrumentadas de los estudiantes

*Acciones instrumentadas de la pareja de estudiantes E1 y E2.*

##### Actividad 1

Dada la función.  $y = \frac{x}{x-3}$

**TABLA I.** Actividad didáctica 1

X	$y = \frac{x}{x-3}$
-8	
-7	
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

En un principio, la pareja de alumnos E1 y E2 está viendo, la expresión algebraica de la función y la tabla I (en la actividad proporcionada en papel), se les solicita que la llenen, haciendo uso de una hoja de Excel y posteriormente grafiquen.

Inicialmente los alumnos van llenando la tabla y comentan sobre el valor  $x=3$ , revisando que no hay un valor numérico para la ordenada, pues en Excel aparece un símbolo de error, (AI-1). La intención es sondear en primera instancia las ideas que el estudiante tiene sobre la recta  $x=3$ , después de haber interactuado con el registro tabular y algebraico. Posteriormente se le solicita el llenado de otras dos tablas (marco numérico), para que reconsideren sus respuestas, así como para que puedan construir la idea del comportamiento de  $y=f(x)$  alrededor de  $x=3$ .

TABLA II.

X	$y = \frac{x}{x-3}$
3.1	
3.01	
3.001	
3.0001	

TABLA III.

X	$y = \frac{x}{x-3}$
2.99	
2.99	
2.999	
2.9999	

Después del llenado de las tablas, E1 y E2 comentan que el valor en la tabla dos, es cada vez más grande y en la tabla tres, se hace cada vez más chico y se preguntan entre ellos, con qué simbología matemática se escriben esas situaciones (AI-4). Dejan en blanco las expresiones algebraicas de los límites.

A continuación, se inicia en el marco numérico la construcción de la asíntota horizontal (AI-2), para lo que se les proporcionan dos tablas (IV y V), para ser llenadas y que grafiquen. En esta parte los estudiantes comentan que el valor de la ordenada es 1.

Por lo que respecta a completar las expresiones matemáticas de los límites, los alumnos piensan mucho sobre el valor correcto y deciden utilizar la expresión algebraica, haciendo sustituciones (AI-4)

TABLA IV.

X	$y = \frac{x}{x-3}$
10	
100	
1000	
10000	
100000	



TABLA V.

X	$y = \frac{x}{x-3}$
-10	
-100	
-1000	
-10000	
-100000	

Con el llenado de las tablas cuatro y cinco, los alumnos E1 y E2, pueden responder los límites cuando  $x$  tiende a más infinito y menos infinito (AI-6). Anotan que el valor es en número 1

El estudiante E2, comenta: "ya recordé y para números cada vez más grandes, se usa el infinito, entonces en las expresiones de los límites de arriba, cuando  $x$  tiende a tres con el más y a tres con el menos, se escribe el símbolo de infinito" (AI-4).

Los alumnos regresan a contestar los límites cuando  $x$  tiende a 3 por la derecha y cuando  $x$  tiende a tres por la izquierda.

Enseguida grafican las rectas  $x=3$ ,  $y=1$  (AI-7). No recuerdan el nombre de las rectas, pero indican que para  $x=3$ , la curva se va al infinito y para  $y=1$ , la curva se acerca a 1 (AI-8).

Por último, se les solicita que dibujen la gráfica que consideren correcta para  $y = \frac{x}{x-3}$

E1 le dice a E2, "recuerdo que las rectas  $y=1$  y  $x=3$ , se dibujan con una línea punteada"

"Aquí en la gráfica (señala la gráfica en la pantalla), se sustituye el punto que dibujo Excel en  $x=3$ , por la recta punteada" (AI-5).

E2, le solicita al profesor, poder usar internet y buscar el nombre de las rectas  $x=3$ ,  $y=1$ .

Los estudiantes revisan en internet, en la dirección [www.matematicasvisuales.com](http://www.matematicasvisuales.com), encuentran el nombre de las rectas y su comportamiento, regresan a contestar el reactivo ocho de la actividad.

## V. RESULTADOS

Los estudiantes están tan acostumbrados a trabajar los límites por manipulación algebraica, sustituyendo el valor al que tiende  $x$ , no aplicando sus propiedades, así como no llegando a un proceso de abstracción.

El tratar los límites en el sistema semiótico de representación tabular, ocasiona al estudiante un serio conflicto, pues una minoría reconoce el comportamiento de la función tratado numéricamente, esto es, el interpretar información vaciada en una tabla representa un obstáculo.

Parece ser que el obtener información a partir del sistema gráfico, siempre y cuando sean reconocidas en el registro algebraico las funciones propuestas gráficamente, da al estudiante la seguridad de responder, pues la lectura directa de la gráfica no lo conduce a nada.

Un impedimento para que el estudiante interprete los comportamientos solicitados en el registro analítico lo representa, el no poder asegurar una expresión algebraica que designe a la gráfica que se le presenta, pues no puede procesar información directamente de una gráfica.

Además, nos encontramos que los estudiantes no se sienten cómodos, a la solicitud de expresar con notación matemática (sistema semiótico de representación algebraica) el comportamiento de la función. Por lo que es necesario darle más tiempo de trabajo a esta situación.

## VI. CONCLUSIONES

El marco de las representaciones semióticas, en conjunción con la teoría de la instrumentación, presentan un ambiente que posibilita la construcción de conceptos matemáticos, pues el estudiante tiene la oportunidad de ver al concepto en diferentes facetas, a las que se les llama registros, pudiendo transitar entre ellos y con la posibilidad de reconocer las propiedades comunes y no comunes de un mismo objeto matemático, esto es efectuar tratamientos específicos y avanzar en las construcciones instrumentadas.

La habilidad para usar la tecnología favorece al desarrollo de las capacidades de los estudiantes, al manejar información de una manera más rápida, resolver algoritmos de manera casi trivial, y tener acceso a diferentes representaciones entre otras.

La introducción del concepto de función racional de esta manera permitió dar sentido a determinados conceptos: función, límite e infinito, en un contexto dinámico, pudiendo el estudiante conjugarlos y darle sentido a su curso de cálculo y no como entes aisladas, sino como un todo para su aplicación en otros temas del curso.

La puesta en práctica de las actividades didácticas implicó un trabajo colaborativo del estudiante, una interacción con situaciones problemáticas, donde con el apoyo de su herramienta debía resolverlas; modificando, complementando, revisando o rechazando sus conocimientos anteriores, con la finalidad de formar nuevas concepciones que le permitan avanzar.

Los estudiantes pudieron llegar a conceptualizar a través de acciones instrumentadas, acciones relacionadas con el artefacto y acciones percepto-gesturales.

## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En E. Mancera y C. Pérez (Eds), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática*. Memorias de la XII CIAEM, (pp. 9-21). México: Edebé. Ediciones Internacionales S.A de C.V.
- Azarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Extraordinario 1), 267-299.
- Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Una empresa docente, (pp. 32-59). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.A., Ainley, J., Adresen, M., Cheung, Y., ..., Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. En C. Hoyles y J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17<sup>th</sup> ICMI Study* (Vol. 13, pp. 89-132). London: Springer. doi:10.1007/978/-1-4419-0146-0\_7

- Duval, R. (2001b). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, Paper presented to the Discussion Group on Semiotics and Mathematics Education at de 25<sup>th</sup> PME International Conference, The Netherlands, University of Utrecht.
- Gómez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. 7(1), 471-498.
- Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (2003). Recuperado el 3 de octubre de 2014 de <http://www.ilce.mx/plataformas-tecnologicas/.../enciclomedia>.
- Instituto nacional para la Evaluación de la Educación. (2007). *PISA 2006 México*. Recuperado el 24 de enero de 2009 de la página de la Organización de los Estados Iberoamericanos en. [http://www.oei.es/noticias/spip.php?article149&debut\\_5ultimasOEI=3](http://www.oei.es/noticias/spip.php?article149&debut_5ultimasOEI=3)
- Organization for Economic Co-Operation and Development (OECD). (2007). *El Programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Recuperado el 24 de enero de 2009, de la página de la OECD en [http://www.oecd.org/document/51/0,3343,en\\_32252351\\_32235731\\_39732595\\_1\\_1\\_1\\_1,00.html](http://www.oecd.org/document/51/0,3343,en_32252351_32235731_39732595_1_1_1_1,00.html)
- Trouche, L. y Drijvers, P. (2014, Agosto). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and Applications*. 33(3), 193-209. doi: 10.1093/teamat/hru014.
- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-103.