Lat. Am. J. Sci. Educ. 4, 22088 (2017)

LASERA

Latin American Journal of Science Education

www.lajse.org

El estudio de la función cuadrática con tecnología por maestros en formación

Elvia Rosa Ruiz Ledezma[a], Alma Rosa Villagómez Zavala[b], Maricela Bonilla González[c], Carolina Rubí Real Ortega[d]

[a]Instituto Politécnico Nacional. CECyT 11 Wilfrido Massieu. Av. de los Maestros 217, Miguel Hidalgo, 11340 CDMX

[b,c,d] Escuela Normal Superior de México. Licenciatura en Matemáticas. Manuel Salazar 201, Azcapotzalco, 02420 Ciudad de México

A R T I C L E I N F O

Received: September 8, 2017
Accepted: October 15, 2017
Available on-line: November 1, 2017

Keywords: Instrumental genesis, quadratic function, didactic sequences

E-mail addresses:
ruizelvia@hotmail.com.
amyy_0214@hotmail.com
marybog1804@gmail.com
crealortega@gmail.com

ISSN 2007-9842

R E S U M E N

En este artículo reportamos algunos resultados acerca cómo sucede el proceso de génesis instrumental con profesores en formación en un curso de matemáticas, cuando se realizan tareas relacionadas con la identificación de las propiedades y características de familias de parábolas en las que se estudian elementos en torno al vértice, tipo de raíces, eje de simetría, concavidad, amplitud, dominio y rango, con el apoyo de la tecnología. La idea es estudiar la construcción del objeto matemático al interactuar con el artefacto convirtiéndolo en instrumento y así apropiarse de la actividad matemática. En dichas tareas se propone también que el docente en formación establezca relaciones entre las diferentes representaciones: la hoja de cálculo y la actividad en lápiz y papel.

A B S T R A C T

In this article we report some results about how the process of instrumental genesis happens with teachers in formation in a course of mathematics, when tasks related to the identification of the properties and characteristics of families of parabolas in which elements are studied around the vertex, root type, axis of symmetry, concavity, amplitude, domain and rank, supported by technology. The idea is to study the construction of the mathematical object by interacting with the artifact by converting it into an instrument and thus appropriating the mathematical activity. In these tasks it is also proposed that the teacher in formation establish relations between the different representations: the spreadsheet and the activity in pencil and paper.

I. INTRODUCCIÓN

El auge del uso de la tecnología en los últimos años ha motivado a varios sectores involucrados en la enseñanza de las matemáticas a proponer la incorporación de estos recursos para potenciar las actividades de aprendizaje y que dicha incorporación impacte en el desempeño de los estudiantes. La introducción de estas herramientas tecnológicas no ha sido tarea sencilla ya que se modifican la dinámica del aula y el tipo de actividades que deben plantearse en clase. Estos cambios implican replantear el rol del docente, el diseño de nuevas actividades para el aprendizaje, definir nuevos criterios de evaluación, entre otras cosas. Desde esta perspectiva, Artigue (2002) señala que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos y en el caso de los profesores los puedan manejar como recursos para el desarrollo de su clase.

De acuerdo con el programa de estudios vigente para la educación secundaria en México (SEP, 2011) respecto a el estudio de la función cuadrática, objeto matemático de interés para esta investigación, éste se incluye en el tercer grado mediante el uso de sus diferentes representaciones. El aprendizaje esperado es que los alumnos sean capaces de leer y representar gráfica y algebraicamente relaciones cuadráticas.

Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005), señalan que los alumnos del nivel secundaria son capaces de resolver algunas tareas relacionadas con el reconocimiento de la función cuadrática ya que pueden identificar los diferentes elementos de las representaciones simbólicas y gráficas, evaluar la función y dar ejemplos de esta función, entre otras cosas. Sin embargo, presentan dificultades para establecer relaciones entre las diferentes representaciones: tabular, algebraica y gráfica (Gómez, 2005).

Al considerar lo anterior, es posible que los estudiantes normalistas tengan dificultades para establecer relaciones entre las diversas representaciones de la función cuadrática y en la identificación de los distintos elementos de la función aun cuando se espera que sean capaces de proponer secuencias didácticas para estudiar el objeto matemático con las que se favorezca el logro del aprendizaje esperado y el establecimiento de las relaciones entre las diversas representaciones de esta función. Por ello, se pone de manifiesto la necesidad de diseñar secuencias de enseñanza para estudiar funciones cuadráticas con y sin tecnología para ponerlas en marcha con los alumnos normalistas y contribuir de esa manera con su formación.

Con base en esta problemática, las preguntas de investigación que se pretenden responder son las siguientes:

¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes normalistas al estudiar la función cuadrática?

¿De qué manera se favorece la relación entre las diversas representaciones de la función cuadrática mediante el uso de la tecnología?

¿Qué es lo que se puede lograr con el uso de la tecnología que difícilmente se lograría al trabajar con lápiz y papel cuando se estudian funciones cuadráticas?.

II. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de la investigación proponemos un marco teórico que permita analizar los ambientes tecnológicos de enseñanza/aprendizaje y la forma cómo sucede el proceso de transformación instrumental de los estudiantes en la construcción del objeto matemático.

El marco teórico que sustenta nuestra investigación se basa en la teoría de la aproximación instrumental con la génesis instrumental. En principio nos referimos a la teoría de la génesis instrumental, entendida como el proceso de transformación de un artefacto en un instrumento a través de la construcción de esquemas mentales por el sujeto (Drijvers y Gravemeijer, 2005) y más generalmente por la apropiación de esquemas sociales preexistentes (Artigue, 2002).

La aproximación instrumental en educación matemática surge en el contexto francés, de la ingeniería didáctica, la teoría de las situaciones didácticas y la teoría antropológico de la didáctica. En un inicio la aproximación instrumental fue aplicada, principalmente en ambientes tecnológicos como los CAS (sistemas algebraicos computarizados), utilizados por estudiantes y profesores, pero que no fueron diseñados con un propósito educativo (Trouche y Drijvers 2014). Inicialmente, la teoría toma tres ideas esenciales desde la ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995).

1.- La distinción entre un artefacto y un instrumento: un artefacto es un objeto material o abstracto, un producto de la actividad humana y es usado por un sujeto para transformar un tipo de tarea. Un instrumento es lo que el sujeto construye desde el artefacto.

2.- El reconocimiento de que la apropiación de un artefacto y la construcción de un instrumento es un proceso complejo, llamado génesis instrumental, en el cual una nueva entidad ha nacido.

3.- La comprensión de que la génesis instrumental no es un proceso simple, es un proceso que envuelve dos componentes, llamados:

Instrumentalización, dirigido hacia el artefacto; en el que el sujeto lo transforma y adapta a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003), pasando por las etapas de descubrimiento, selección, personalización y transformación (Trouche, 2005). Lo que permite el desarrollo de esquemas de utilización. Así mismo este proceso puede enriquecer o empobrecer la herramienta sin una tarea específica.

Instrumentación, dirigido hacia el sujeto; en el que se generan esquemas de acción; es decir, habilidades de aplicación de la herramienta para la realización de tareas significativas que a su vez se transforman en técnicas (Gómez, 2009) que permiten respuestas efectivas a actividades matemáticas. De la misma manera en la práctica, la construcción de esquemas no es fácil, requiriéndose tiempo y esfuerzo, pues los estudiantes pueden construir esquemas ineficientes e inapropiados, basados en concepciones erróneas.

Los estudiantes desarrollan los procesos descritos anteriormente, cuando llevan a cabo las actividades mediadas por la herramienta, con la finalidad de obtener información sobre el concepto. El artefacto se transforma en instrumento, en la medida que los alumnos desarrollan esquemas para la resolución de tareas con la ayuda del instrumento: Instrumento = Artefacto + Esquemas y técnicas para un determinado tipo de tareas (Rabardel, 2002, citado por Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

III. MÉTODO

Se realizó un estudio cualitativo con intervención en la fase de enseñanza, la población es un grupo de 20 estudiantes de cuarto semestre de la especialidad en matemáticas. Las actividades se pusieron en marcha como parte del trabajo que se lleva a cabo en la asignatura "Plano cartesiano y funciones" de la licenciatura en matemáticas de la Escuela Normal Superior de México.

La realización de las actividades estuvo dividida en tres etapas importantes: 1) Diseño, 2) Puesta en marcha, y 3) Evaluación. En la etapa del diseño se trabajó sobre una propuesta didáctica en la que se estudian los elementos más importantes de la función cuadrática con y sin el uso de la tecnología, de tal forma que se pudiera analizar qué es lo que se puede lograr con el uso de la tecnología que difícilmente se lograría al trabajar con lápiz y papel cuando se estudian dichas funciones cuadráticas. La etapa que se denomina puesta en marcha se asocia con la aplicación de la secuencia didáctica con los estudiantes normalistas de la especialidad en matemáticas quienes están cursando el cuarto semestre. Por último, en la última etapa se llevó a cabo el análisis de los resultados obtenidos tanto de la secuencia didáctica en general, como de los estudiantes normalistas en algunas actividades clave. En esta etapa también se pretendía elaborar una segunda versión de la secuencia didáctica con la finalidad de mejorarla.

IV. RESULTADOS

Al inicio de la secuencia didáctica se aplicó un cuestionario diagnóstico que nos permitió conocer las características individuales de los estudiantes respecto a sus conocimientos sobre la función cuadrática. Los resultados del cuestionario muestran que de los 20 estudiantes que resolvieron el cuestionario sólo cuatro tienen claro el concepto de función ya que refieren que es una relación entre un conjunto dado x (dominio) y otro conjunto de elementos y (codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento $f(x)$ del codominio. Los estudiantes que resolvieron incorrectamente este ítem, refieren que una función es una ecuación o expresión algebraica en el que intervienen incógnitas (ver *Figura 1*). El concepto de función cuadrática la mayoría también lo relaciona con una ecuación cuadrática (ver *Figura 2*).

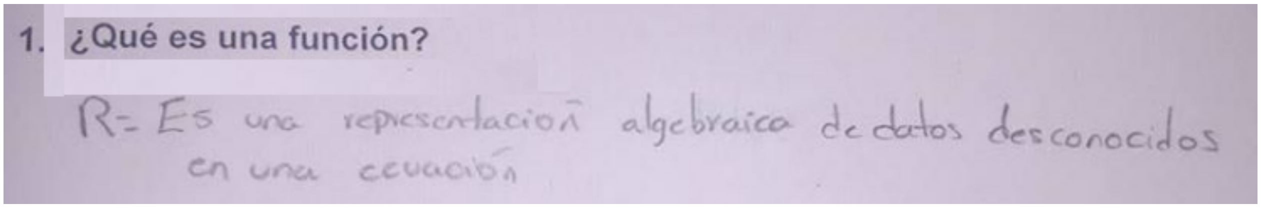


FIGURA 1. Se muestra la respuesta al reactivo 1 del cuestionario diagnóstico.

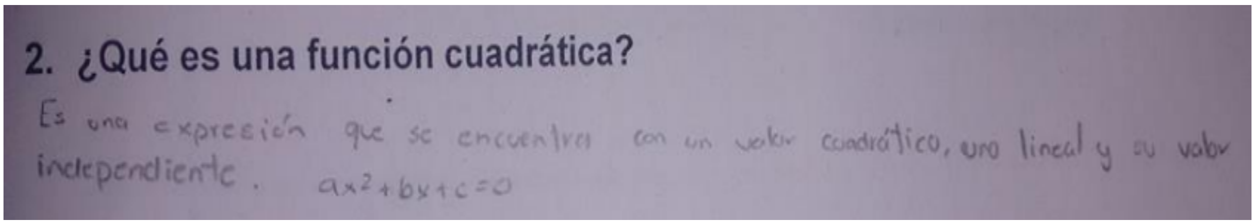


FIGURA 2. Se muestra la respuesta al reactivo 2 del cuestionario diagnóstico.

Respecto a los elementos de la función, la mayoría de los estudiantes refieren que los elementos son: exponente cuadrático, valor lineal y término independiente. Ocho estudiantes señalan que son el vértice, raíces, rango, dominio y contradominio. En cuanto al número y tipo de raíces once estudiantes refieren que las funciones cuadráticas tienen dos raíces, pero la mayoría señala que dichas raíces sólo pueden ser positivas o negativas.

Siete estudiantes escribieron correctamente la fórmula general de una función cuadrática, el resto escribieron una ecuación cuadrática o una expresión general cuadrática (ver Figura 3). Diecisiete estudiantes tienen claro que el gráfico que corresponde a una función cuadrática es una parábola y además la grafican correctamente.

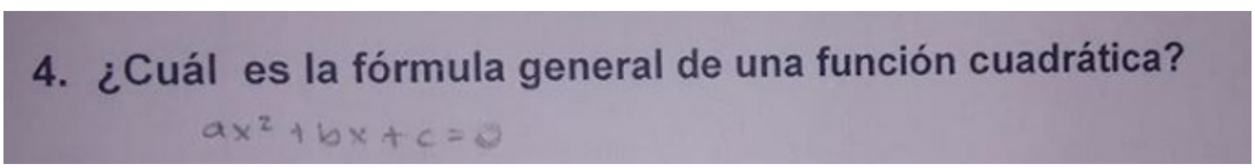
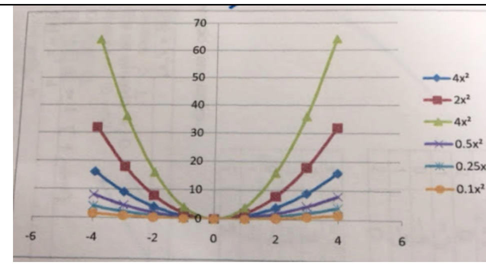
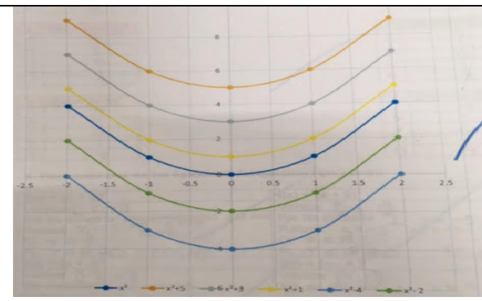
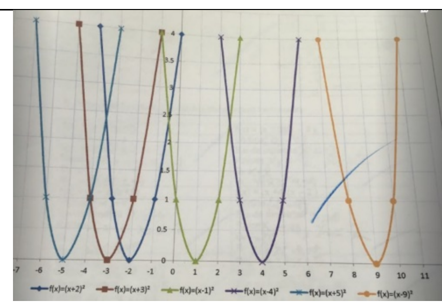
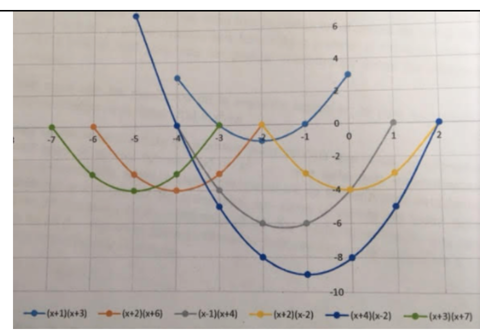


FIGURA 3. Se muestra la respuesta al reactivo 4 del cuestionario diagnóstico.

Por otro lado, el estudio de la función cuadrática se llevó a cabo con la finalidad de proponer una secuencia didáctica en la se pudiera incorporar el uso de la tecnología, además de evaluar su impacto en la construcción del conocimiento matemático de los alumnos. Para el análisis de los distintos tipos de función cuadrática se utilizó el programa de Excel con la idea de que alumno identificara las propiedades y características de familias de parábolas de la forma: $f(x) = ax^2$, $f(x) = x^2 + a$, $f(x) = (x + a)^2$ y $f(x) = (x + a)\ (x + b)$. Se estudiaron elementos en torno al vértice, tipo de raíces, eje de simetría, concavidad, amplitud, dominio y rango. Se planteó también que el alumno estableciera relaciones entre las diferentes representaciones: la hoja de cálculo y la actividad en lápiz y papel.

De acuerdo con los resultados de la implementación de la secuencia didáctica para el estudio de la función cuadrática, el docente en formación realizó transformaciones (génesis instrumentales) en la construcción del objeto matemático con el apoyo de la tecnología en las actividades que se llevaron a cabo. Las transformaciones realizadas se presentan en la siguiente tabla.

TABLA 1. Transformaciones que realizan los estudiantes del objeto matemático.

ACTIVIDAD	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	NOTACIÓN ALGEBRAICA	DESCRIPCIÓN	ACTIVIDAD
No. 1	Amplitud y concavidad	$f(x) = ax^2$	Se solicitó a los estudiantes que graficaran seis funciones e identificaran sus elementos. Ellos fueron capaces de encontrar regularidades y patrones en esta familia de parábolas lo que después les permitió resolver otros casos.	
No. 2	Traslación vertical de la función cuadrática	$f(x)=ax^2 + a$	En esta actividad se pidió a los estudiantes que graficaran también seis funciones e identificaran sus elementos. Los alumnos pudieron darse cuenta de que en realidad se trataba de la misma función que se estudió en la primera actividad, pues la gráfica sólo experimentaba traslaciones verticales. De igual manera pudieron resolver otros casos.	
No. 3	Traslación horizontal	$f(x)=(x+a)^2$	Los estudiantes graficaron nuevamente seis funciones cuadráticas e identificaron sus elementos. Ellos no tuvieron dificultad para concluir la equivalencia de esta familia con la función $f(x) = x^2$, con la diferencia de que se presentaban traslaciones horizontales.	
No. 4	Función cuadrática completa	$f(x)=(x+a)(x+b)$	Al graficar las seis funciones e identificar los elementos los estudiantes concluyeron que se trataba de una ecuación cuadrática completa cuyas raíces son diferentes.	

Cada una de las actividades que se presentaron en la tabla anterior se llevaron a cabo en una sesión. La secuencia didáctica tuvo una duración total de 5 sesiones. En la primera sesión los profesores en formación estudiaron la función cuadrática de la forma: $f(x) = ax^2$, para ello se les asignaron seis funciones para graficar en Excel en las que debían determinar: vértices, raíces, ejes de simetría, así como el dominio y el rango de cada una de ellas.

Posteriormente, sin graficar, se les pedían los mismos elementos de otras tres funciones de la misma familia. Con ello se pretendía indagar si los alumnos serían capaces de encontrar regularidades y patrones en esta familia que les permitieran resolver los últimos tres casos.

Se encontró que de los 20 alumnos 18 si lograron identificar las siguientes características en la familia de parábolas:

- Para valores de $a > 0$ la parábola abría hacia arriba.
- Para valores de $0 \leq a \leq 1$ la parábola abría hacia arriba, pero se acortaba y se hacía más amplia.
- Para valores de $a \geq 1$ la parábola abría hacia arriba, se alargaba y se volvía más angosta.

Algunos estudiantes explicaron que para $a= 0$ la función se transformaba en una función lineal. Aunque en realidad si $a= 0$ se transformaría en la función constante $f(x) = 0$. También pudieron darse cuenta que para valores de $a < 0$ la parábola abría hacia abajo. La Figura 1 muestra la resolución de uno de los estudiantes de la actividad 1.

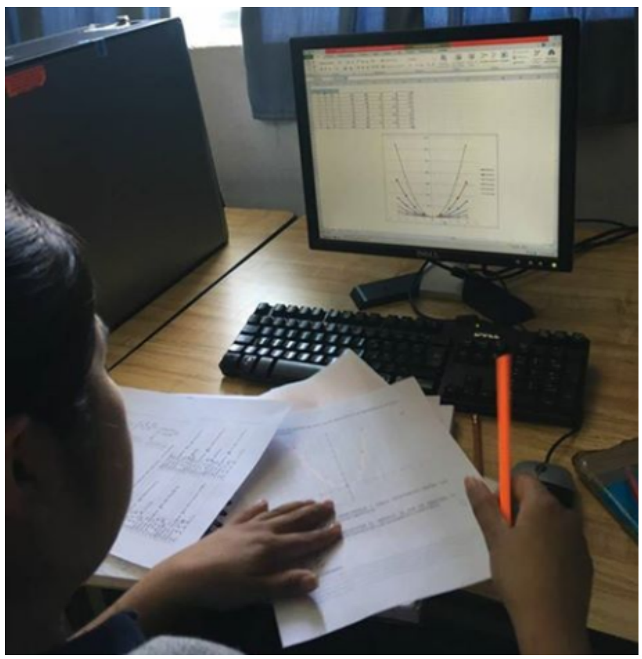


FIGURA 4. Alumno resolviendo la actividad 1.

Es importante hacer notar que 6 de los 20 alumnos no pudieron identificar el rango de estas funciones y de los 14 alumnos restantes solamente 10 pudieron identificar que el vértice determinaba el rango de las funciones y además lo expresaron adecuadamente como un intervalo cerrado que incluía también al cero.

La dinámica a seguir durante las siguientes tres sesiones con el apoyo del software fue la misma que en la primera, dadas seis funciones al inicio de la sesión y tres al final, sin graficar, encontrar todos los elementos solicitados

En la segunda sesión se trabajó con la función de la forma $f(x) = x^2 +a$. Aquí, la totalidad de los alumnos pudo concluir que en realidad se trataba de la misma función que se estudió en la primera sesión, pues la gráfica sólo experimentaba traslaciones verticales. Además, los estudiantes explicaron que el eje de simetría para esta familia de parábolas era el eje de las ordenadas, así como el vértice de todas estas funciones se localizaba en la coordenada **(0, a)**.

Así mismo encontraron que para valores de $a < 0$ las raíces de la parábola no eran reales y para valores de $a > 0$ las raíces eran reales y simétricas.

No obstante, la dificultad en esta sesión les surgió cuando $\sqrt{a}$ no era igual a un número entero. Lograron resolver el problema graficando las tres últimas funciones, habiéndoles permitido esta práctica como forma de reafirmar la identificación de la regularidad en esta función, objetivo de la secuencia.

Los avances en esta sesión fueron considerablemente notables, incluso para una alumna que en la primera sesión no logró trazar las gráficas ni encontrar los elementos solicitados, en esta ocasión pudo graficar las funciones y obtener los elementos solicitados en las seis primeras funciones, aunque no logró determinar vértices y rangos en las tres últimas.

Respecto a la tercera sesión, en torno a la función $f(x) = (x + a)^2$, **c**on cierta facilidad los estudiantes descubrieron la equivalencia de esta familia con la función $f(x) = x^2$, aseguraron que sus desplazamientos se llevaban a cabo sobre el eje de las abscisas manteniéndose idéntica la amplitud de la parábola e identificaron que el vértice de cada una de ellas se localizaba en la coordenada **(-a, 0)** acertando también respecto a sus raíces en el simétrico de **a.**

En la cuarta sesión se estudió la función $f(x) = (x+a)\ (x+b)$, en este caso la intención era complicar la resolución omitiendo algunos valores del dominio que les permitieran descubrir con cierta facilidad la simetría de la parábola, sin embargo, a pesar de esta carencia resolvieron el problema asignándole al dominio valores que les permitieran visualizar dicha simetría, valiéndose sin duda, de los conocimientos adquiridos en las sesiones previas. Así mismo pudieron deducir que las raíces de estas funciones se localizaban en los simétricos de **a** y **b**, y, por tanto, para encontrar las coordenadas del vértice tenían que calcular los puntos medios de las raíces de la función.

La quinta y última sesión fue planeada para indagar la capacidad del alumno para transferir lo aprendido a situaciones contextualizadas, pero ahora sin el apoyo del software. La situación que se planteó fue la siguiente:

Una fábrica pequeña que se dedica a la elaboración de artesanías determina que la relación entre el precio y la demanda del producto estrella está dada por:

$$p = 350 - 5x$$

En donde *p* corresponde al precio de las artesanías en pesos y *x* a la cantidad de artesanías

a) Determina la función de ingreso
b) Determina la cantidad de artesanías que se deben producir y vender para que el ingreso sea máximo.

En la resolución de la situación los estudiantes tuvieron algunas dificultades, la mayoría no pudo transferir del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Hubo necesidad de ayudarles en este aspecto llevándolos mediante ejemplos al objetivo deseado.

Posteriormente lograron resolver el problema una vez que identificaron que la función de ingresos correspondía a una función cuadrática, cuyo coeficiente del término cuadrático era negativo, y por tanto, la parábola abría hacia abajo y el vértice de la función representaba el máximo valor de la misma, aunque para encontrar este valor máximo no lo hicieron como lo habían hecho en la cuarta sesión, a través del punto medio de las raíces, sino que lo hicieron asignando valores al dominio de la función.

V. CONCLUSIONES

Consideramos que la teoría de la génesis instrumental nos ayudó a explicar la relación entre las actividades que se esperaba que realizara el estudiante, su implementación en ambientes tecnológicos y los tipos de conocimiento implicado; esto es, a través del ambiente tecnológico como mediador entre los estudiantes y el concepto matemático que se deseaba estudiar, los alumnos se adaptaron a la herramienta y adaptaron la herramienta para la construcción del objeto matemático función cuadrática.

El instrumento, esa entidad mixta, parte artefacto y parte acciones operatorias, se transformó bajo un proceso de génesis instrumental. Primeramente, cuando el estudiante automatizó, no sólo el objeto material (computadora) con sus periféricos sino los componentes del programa computacional en el ambiente tecnológico para dar respuesta a tareas significativas sobre la función cuadrática. En segundo lugar, el empleo de los instrumentos permitió construir respuestas efectivas de la actividad matemática, concluyendo el proceso de génesis instrumental e iniciándose el análisis de la construcción de conocimientos al atribuir significados a los objetos matemáticos en función de la actividad y de las secuencias didácticas.

Por último, para responder la segunda pregunta que nos planteamos, ¿de qué manera se favorece la relación entre las diversas representaciones de la función cuadrática mediante el uso de la tecnología?, podemos decir que, la secuencia didáctica permitió que los estudiantes después de estudiar funciones cuadráticas en un entorno digital (Excel) en donde podían observar regularidades de familias de funciones pasaran al entorno escrito al que realizaron transferencia de lo ya aprendido y cuyas dificultades disminuyeron notablemente.

Respecto a la tercera pregunta, ¿qué es lo que se puede lograr con el uso de la tecnología que difícilmente se lograría al trabajar con lápiz y papel cuando se estudian funciones cuadráticas?, podemos decir que, mediante el uso de la tecnología cuando el estudiante realiza una tabla de valores, de manera automatizada el programa crea la gráfica, y con el uso de lápiz y papel el estudiante debe realizar ambas tareas. Además, es posible observar lo que sucede con la gráfica al cambiar los parámetros sin tener que realizar varias construcciones.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Drijvers, P. y Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. En D. Guin, K, Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 163-196). New York: Springer Verlag.

Drijvers, P., Kieran, C., y Mariotti, M. (2010). Integrating technology into mathematics education. En C. Hoyles y Lagrange, J. B. (Eds.), *Mathematics Education and Technology Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 81-87). New York: Springer.

Gómez, P. (2005). Complejidad de la matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. *Revista EMA, 10* (2), 353-373.

Gómez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*.*7*(1), 471-498.

Lupiáñez, J. B., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Trabajo presentado en V Congreso Ibero-americano de educaçao matemática. Oporto, Portugal.

Rabardel, P., Boumaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, *15*(5), 665-691.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2011). *Programa de Estudios 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* (1^{era} ed.). México, D.F. SEP. Básica.sep.gob.mx//reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/MatematicasSec11.pdf. Recuperado 23 de septiembre de 2014.

Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects. En D. Guin, K, Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 9-40). New York: Springer Verlag.

Trouche, L. Drijvers, P. (septiembre, 2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and its Aplications, 33*(3), 193-2009.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.