



Ambiente tecnológico en el desarrollo de argumentos matemáticos en estudiantes universitarios

Leobardo Mendo Ostos^a, Apolo Castañeda Alonso^b, Lourdes Tarifa Lozano^c

^aInstituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, México. Email: mendo194@gmail.com

^bInstituto Politécnico Nacional, CINVESTAV, México. Email: apcastane@gmail.com

^cUniversidad de Matanzas, Cuba. Email: lourdes.tarifa@umcc.cu

ARTICLE INFO

Received: July 6, 2017

Accepted: July 31, 2017

Available on-line: October 22, 2017

Keywords: Argumentos, metodología ACODESA, representaciones, ambiente tecnológico.

E-mail addresses:

mendo194@gmail.com,

apcastane@gmail.com,

lourdes.tarifa@umcc.cu

ISSN 2007-9842

© 2013 Institute of Science Education.
All rights reserved

ABSTRACT

The development of abilities is fundamental for university students to achieve the competencies that educational programs require of each of the professionals in training, in particular, the skills to obtain mathematical arguments is fundamental in the study of basic sciences. The study was motivated by the difficulties detected in the students in the use of the concept of improper integral in the solution of problems typical of their career. A didactic sequence was designed and implemented with students who studied the second semester of Industrial Engineering at the Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, Veracruz. For the development of the same was used the ACODESA methodology and in the analysis of the data was used the argumentative model of TOULMIN, which allowed to describe the construction, content and structure of the arguments of the students in spontaneous representations of the verbal and visual type, and that favors the transition to the algebraic, graphic and numerical representations during its solution, which was realized using a technological environment. The integration of these three elements (ACODESA methodology, the Toulmin model and the technological environment, specifically the Geogebra software) in a cooperative learning, in which the scientific debate and the self-reflection combined with a technological environment stand as the main hypothesis of Work for the development of skills that contribute to the formation of mathematical arguments in students.

El desarrollo de habilidades es fundamental para que los estudiantes universitarios alcancen las competencias que los programas educativos exigen a cada uno de los profesionales en formación, en particular, las habilidades para obtener los argumentos matemáticos es fundamental en el estudio de las ciencias básicas. El estudio estuvo motivado por las dificultades detectadas en los estudiantes en la utilización del concepto de integral impropia en la solución de problemas típicos de su carrera. Se diseñó y puso en práctica una secuencia didáctica con estudiantes que cursaban el segundo semestre de Ingeniería Industrial en el Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, Veracruz. Para el desarrollo de la misma se utilizó la metodología ACODESA y en el análisis de los datos se empleó el modelo argumentativo de TOULMIN, el cual permitió describir la construcción, contenido y estructura de los argumentos de los estudiantes en representaciones espontáneas del tipo verbal y visual, y que favorezca la transición a las representaciones algebraica, gráfica y numérica durante su solución, lo que se realizó utilizando un ambiente tecnológico. La integración de estos tres elementos (metodología ACODESA, el modelo Toulmin y el ambiente tecnológico, en específico el software Geogebra) en un aprendizaje cooperativo, en el que prime el debate científico y la autorreflexión conjugada con un ambiente tecnológico se sostiene como principal hipótesis del trabajo para el desarrollo de habilidades que contribuyan a la formación de argumentos matemáticos en los estudiantes.

I. INTRODUCCIÓN

Durante años se ha podido constatar el fracaso en el aprendizaje de las matemáticas y en particular del cálculo en la universidad (Gibert, E., 2012); González-Martín y Camacho (2004), lo que induce a reflexionar sobre la importancia de analizar y reconocer cómo los estudiantes construyen y justifican sus ideas en el estudio de los conceptos matemáticos, así como a la valoración de lo fructífero que podría ser la integración de un escenario didáctico experimental que involucre los recursos tecnológicos, el trabajo colaborativo, y el debate, para favorecer la argumentación en el estudio de la matemática (Okada; Simón, 1997), usando herramientas tecnológicas que permitan la transferencia entre diferentes sistemas de representación (Duval, 2000, Hernández, Acevedo; Martínez y Cruz 2014)

Los autores de este trabajo durante varias décadas han laborado en la formación de ingenieros en centros universitarios y las observaciones realizadas al trabajo de los estudiantes coinciden con las expresadas por Arriaga (2015), las que tienen en cuenta las competencias que el sistema educativo mexicano exige para este nivel (ANUIES, 2013). Las valoraciones formuladas motivaron el desarrollo de la investigación. Al respecto, los trabajos de González-Martín (2005); García y Tintorer (2016) reportan dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos universitarios al aprender los conceptos del cálculo diferencial e integral. Ellas son inherentes a los propios conceptos del análisis matemático, abordados en los niveles precedentes y otros se relacionan con la ausencia de significado de conceptos como límites, convergencia, definición de integral definida, series y sucesiones que se estudian en este nivel.

La enseñanza de esta ciencia en múltiples ocasiones se realiza sobre la base de un fuerte trabajo algorítmico sin la posibilidad de problematizar su estructura y forma. En general el profesor se limita a exponer los conceptos, explicar procedimientos y resolver problemas, y el estudiante debe atender a la explicación y resolver ejercicios similares repitiendo los mismos pasos. Socas, Ruano (2014), Cuesta y Escalante (2014), entre otros señalan que en la resolución de ejercicios a estudiantes y profesores, se comprueba la existencia de dificultades para calcular sus valores y para realizar cálculos algebraicos, lo que induce a la valoración de que aplican un determinado algoritmo sin el análisis de las condiciones del problema y los casos particulares que en el estudio pueden aparecer.

Si bien, los estudiantes de los primeros años de la universidad poseen un manejo mecánico y operativo de muchos de los conceptos que deben utilizar en la disciplina matemática en la universidad (González-Martín; Camacho, 2004) se requiere reflexionar y reconocer el carácter variacional de ellos en las nuevas condiciones desde otras experiencias de trabajo y contextos de representación.

A partir de las valoraciones anteriores se plantea la necesidad de analizar las características de los argumentos expuestos por los estudiantes al resolver una secuencia didáctica sobre determinados contenidos en un ambiente tecnológico. En este sentido se debe poder describir la construcción, contenido y estructura de los argumentos matemáticos. Entre las características deberá enfatizarse en cómo se realiza la transferencia de información entre las representaciones matemáticas [gráfica, numérica y algebraica], qué elementos conceptuales se tienen en cuenta para justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas, entre otras.

La investigación por tanto tuvo como finalidad identificar los argumentos que exponen los estudiantes, describir su estructura y hacer inferencias sobre sus líneas de razonamiento para establecer acciones que permitan su mejora continua. Para esto, la resolución de la secuencia didáctica se planteó de forma colectiva a fin de que los estudiantes expusieran sus ideas, generaran debates alrededor de la actividad matemática, dialogaran y mantuvieran comunicación constante. En la secuencia se usó el software de geometría dinámica GeoGebra, como medio para visualizar comportamientos, analizar la variación de las gráficas y agilizar procesos.

Desde el plano de la enseñanza este modelo de actividad matemática representó una novedosa experiencia de trabajo, ya que los estudiantes lograron apoyarse usando la tecnología [como un instrumento didáctico-cognitivo], con la intención de realizar sus propias experimentaciones y trabajar de forma colectiva en la solución de una actividad.

En correspondencia con lo planteado el **objetivo de esta investigación es desarrollar e implementar una secuencia didáctica de carácter experimental dirigida a estudiantes de primer año de universidad para el estudio de los argumentos matemáticos, que promueva representaciones espontáneas del tipo verbal y visual, y que favorezca la transición a las representaciones algebraica, gráfica y numérica en un ambiente tecnológico.** Se pondrá especial atención en los argumentos que exponen los estudiantes durante la solución de la actividad en el contexto de trabajo colectivo, observando lo realizado en papel y computadora, así como el tránsito entre representaciones algebraica, gráfica y numérica, lo que permitirá identificar líneas de razonamiento que serán de utilidad para reorientar las actividades en clase y favorecer el aprendizaje.

La investigación condujo a reflexiones sobre el papel que tiene la herramienta tecnológica en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos. También la estrecha

relación de la visualización para sostener argumentos, matizar y exponer algunas excepciones de sus argumentos.

II. DESARROLLO

Para realizar esta investigación se integraron tres enfoques teóricos: ACODESA (Hitt, 2007), tránsito entre representaciones (Duval, 1993) y la argumentación (Inglis; Mejía-Ramos, 2005), además se vinculan estos a un ambiente tecnológico (Mayorga, Navas y Pacheco, 2014; Vacchieri, 2013). La secuencia didáctica se construyó empleando la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y autorreflexión) que proponen Hitt; González-Martín (2015). Esta metodología, que tiene un propósito didáctico, la empleamos para desarrollar la secuencia didáctica para el estudio de los argumentos matemáticos en determinados contenidos, considerando las oportunidades que brinda al coordinar el trabajo individual, trabajo en equipo y debate grupal. Además, este enfoque asume que el aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión son aspectos centrales del quehacer matemático en el aula, por lo que deben favorecerse y motivarse. Estas características conforman un escenario de trabajo escolar favorable para el estudio de los argumentos, debido a que los estudiantes tienen espacios para exponer y debatir sus ideas.

La metodología ACODESA contempla tres etapas; situación problema, problema y ejemplos- contraejemplos, con 5 fases cada una, que corresponden a tareas específicas y a formas de interacción: trabajo individual, trabajo en equipo, debate, autorreflexión e institucionalización de saberes.

La primera etapa es denominada *situación problema*, donde se incluye un planteamiento introductorio contextualizado y situado a la actividad. En esta etapa se motiva el pensamiento divergente, es decir, generar ideas creativas mediante la exploración de muchas soluciones posibles de manera espontánea. Se favorece en los estudiantes la reflexión sobre diferentes formas de interpretar la situación, se promueve la exploración y la formulación de preguntas sobre los posibles resultados de la actividad y puede conducir a un pensamiento convergente, caracterizado por dar respuesta con rapidez, precisión, centrado en el reconocimiento de regularidades y aplicación de técnicas, sin dar lugar a la ambigüedad. De acuerdo a Hitt (2007) una situación problema debe promover la apertura del pensamiento, lo que fomentará la aparición de representaciones funcionales.

La segunda etapa denominada *problema*, incorpora un planteamiento acotado que conduce a debates muy puntuales y respuestas específicas. De acuerdo con Hitt (2007) esta etapa promueve también el pensamiento convergente-divergente, además de que produce representaciones que vincula aspectos matemáticos, a través de la articulación entre representaciones y los procesos operatorios al interior de esas representaciones.

La tercera etapa denominada *ejemplos-contraejemplos* se caracteriza por un planteamiento práctico que sintetiza aspectos discutidos previamente, además de favorecer el desarrollo de habilidades operatorias y de cálculo. Duval (2000) considera que no sólo son importantes las tareas de transformación y conversión entre registros, sino que también es importante la confrontación entre ejemplos y contraejemplos.

Cada etapa se desarrolla en 5 fases que corresponden a diferentes tipos de actividad:

Primera, *trabajo individual*, donde los estudiantes comienzan la construcción de representaciones funcionales para hacer frente a una tarea determinada y producir representaciones externas (verbales y esquemas).

Segunda: *trabajo en equipo* (aprendizaje colaborativo), los estudiantes se agrupan en equipos para trabajar en las mismas tareas planteadas que se abordan por separado (proceso de discusión y validación, refinamiento de las representaciones funcionales). El refinamiento de las representaciones externas se produce durante esta etapa a través de los debates al interior del equipo, donde cada miembro aporta sus ideas para resolver la problemática.

Tercera: *debate grupal*, es un proceso de discusión y validación del refinamiento de las representaciones funcionales.

Los equipos dan a conocer los resultados obtenidos y analizan las relaciones que guardan las representaciones externas que les ayudaron a comunicar la situación del problema. El profesor juega el papel de promotor de la exposición de las ideas al problema, estimulando la participación de los alumnos, impulsando a establecer hipótesis y justificaciones, hasta llegar a generalizaciones.

Cuarta: *autorreflexión* (proceso de reconstrucción de tareas) el objetivo es promover una reflexión de lo realizado en las etapas previas, donde el estudiante reconstruya, de forma individual, la solución de una tarea, justifique y valide sus conjeturas. En esta fase los estudiantes regresan individualmente a la tarea, que es un proceso de reconstrucción de hechos y autorreflexión.

Quinta: *proceso de institucionalización de saberes*, el profesor inicia un proceso de integración y sistematización de saberes, utilizando las representaciones de los estudiantes y complementándolas con las representaciones

institucionales (gráfico, algebraico, numérico). En la Figura 1 se ilustra un esquema de la organización de las fases de la metodología ACODESA.

Douek (2007) define a la argumentación como el acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión. En este sentido la argumentación, se considera como el proceso de producir un discurso lógicamente conectado sobre un tema, y un argumento como el producto de este proceso. En torno a este tema Goizueta; Planas (2013) sintetizan que un argumento es una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, mientras que una argumentación es el acto de producir razones. Al respecto, Inglis; MejíaE-Ramos; Simpson, (2007) consideran al modelo de Toulmin (1958) como medio para analizar aspectos estructurales del proceso de argumentación en matemáticas.

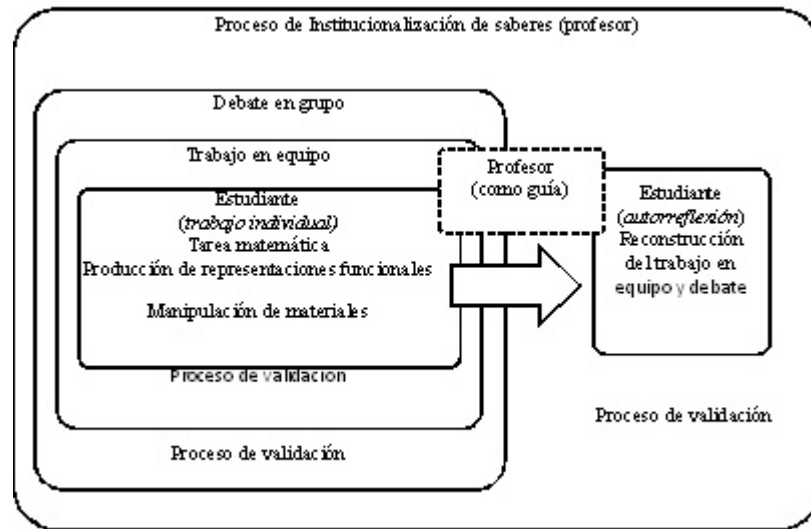


FIGURA 1. Organización de las diferentes etapas de la metodología ACODESA

Toulmin (1958) formuló un modelo para estudiar los argumentos reconociendo la necesidad de analizar condiciones normativas de la argumentación en lenguaje natural. Alvarado; González (2010) explican que este modelo es aplicable a todo tipo de argumentaciones y en particular a esquemas de prueba, tanto intuitivos y transformacionales como axiomáticos. De acuerdo con Toulmin (1958) es en la lógica donde se debe buscar un modelo normativo para la argumentación, sin embargo, a Toulmin le inquietaba en menor medida la validez lógica de un argumento y le preocupaba más su estructura y contenido semántico, por lo que Inglis; Mejía-Ramos (2005) señalan que esta manera de analizar argumentos ha llegado a conocerse como lógica informal.

El modelo de Toulmin (Figura 2) está conformado por seis tipos de declaraciones cada una de las cuales cumple un papel diferente en el argumento (Inglis; Mejía-Ramos, 2005). Ellos son: conclusión, dato, garantía, respaldo, calificativo modal, refutación. La *conclusión* es la tesis que defiende quien argumenta. El *dato* es la información en la cual se basa la conclusión. La *garantía* justifica la conexión entre el dato y conclusión haciendo referencia, por ejemplo, a una regla, una definición, o a través de una analogía. La garantía es apoyada por el soporte a través de un nuevo dato.

En su modelo, Toulmin acepta que una *garantía* acompañada de un *calificativo modal* no absoluto, puede ser propuesta simplemente para reducir el nivel de incertidumbre con respecto a una *conclusión*. El *calificativo modal* especifica la fuerza de la *conclusión*, expresando el grado de confianza de la tesis, y la *refutación* presenta las excepciones de la *conclusión*, aquellas condiciones bajo las cuales no es posible sostener la tesis del argumento.

El modelo de Toulmin opera de la siguiente manera: a partir de un *dato* se formula una *conclusión* (proposición), una garantía conecta los datos con la *conclusión* y se ofrece un cimiento teórico, práctico o experimental: el respaldo.

Los *calificadores modales* (grado de confianza): probablemente, seguramente, sin duda, tal vez, indican el modo en que se interprete la conclusión como verdadera, contingente o probable. Finalmente, en la *refutación* se considera sus posibles reservas u objeciones (limitaciones, excepciones, etcétera).

Se incorporó al diseño didáctico, el ambiente tecnológico con el uso de un software de geometría dinámica

(GeoGebra) con el propósito de que los estudiantes se involucraran en un análisis visual de las gráficas, al explorar formas, observar representaciones dinámicas, analizar comportamientos gráficos y establecer relaciones entre las diferentes representaciones, en un ambiente de trabajo experimental donde se favorece la manipulación de gráficas al variar parámetros y coeficientes.

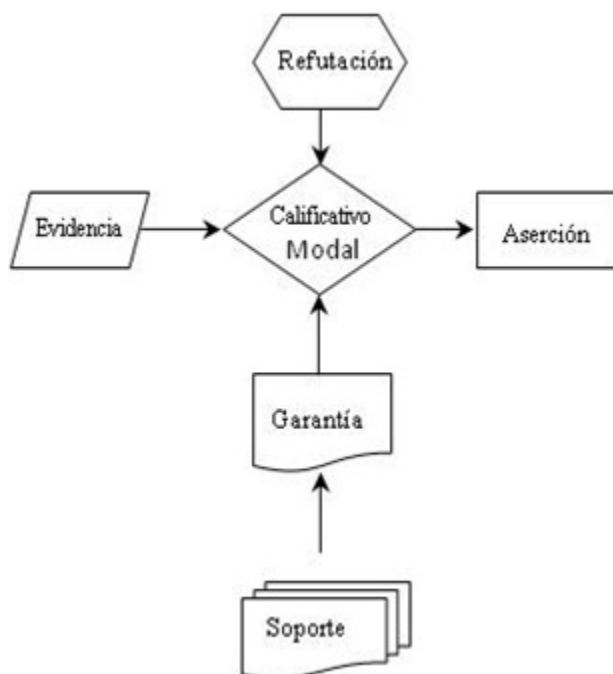


FIGURA 2. Modelo argumentativo de TOULMIN (1958)

Las herramientas tecnológicas permiten establecer nuevas tareas y configuran un ambiente de trabajo escolar experimental. Tal como lo señala Borba y Villarreal (2005); la experimentación en un ambiente de uso de tecnología permite al estudiante construir conjeturas, transitar de un sistema de representación a otro, reconocer patrones, deducir y analizar comportamientos en gráficas y a partir de ello generar argumentos sobre un objeto matemático en construcción. En este contexto, la argumentación es importante, no sólo porque hace viable la observación de las ideas y nociones que el estudiante está concibiendo sobre un saber matemático, sino también, es una forma de generar o desarrollar ideas matemáticas (Inglis; Mejía-Ramos, 2005).

Al respecto, Tall (2009) señala que existen aspectos dinámicos de la matemática que se pueden complementar con el uso de software para la producción de efectos visuales de los conceptos del cálculo. Tall explica que el cálculo está compuesto por conceptos dinámicos, por ejemplo: el deseo de cuantificar las cosas que cambian (el concepto de función), la razón en la cual ellas cambian (derivada), la manera en la cual ellas se acumulan (la integral) y las relaciones entre ellas (Teorema fundamental del cálculo y la solución de ecuaciones diferenciales). El uso del software en la enseñanza proporciona representaciones dinámicas de estos conceptos y permite identificar las relaciones conceptuales, lo cual favorece a un ambiente de trabajo experimental donde se puedan realizar exploraciones a las gráficas.

Baccaglini-Frank; Mariotti (2010) describen un modelo de actividad matemática denominada *arrastre-conjetura* en el contexto del estudio de geometría dinámica. Esta se refiere a capacidad del software para realizar movimientos en tiempo real donde se puede tener una experiencia física dinámica, lo que permite al usuario percibir el movimiento como el efecto de una acción (dependencia lógica), y conduce a identificar propiedades y regularidades. El análisis de los cambios observados puede ayudar al estudiante a formular justificaciones matemáticas a través de la inducción y búsqueda de patrones.

Duval (2000) expone que la construcción de un concepto matemático no se puede lograr si sólo se trabaja con un registro de representación, se deben promover tareas que favorezcan la conversión entre al menos dos de sus distintas representaciones, que permitan establecer una base cognitiva para propiciar el aprendizaje. Cada registro de representación resalta características y propiedades determinadas del objeto matemático, y su contenido depende más

del registro de representación que del objeto representado, por lo que se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático para establecer un dominio conceptual más amplio.

Hitt (2003) considera que las representaciones de un concepto matemático, solo son una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán la construcción del concepto en cuestión.

Establecer el tránsito entre representaciones requiere coordinar las experiencias de trabajo en las diferentes situaciones y planteamientos y transferir esta información a los diferentes contextos de representación. A partir de estos referentes, se construye la idea de transitar y articular basado en explorar conceptos, formular sus propias conjeturas, visualizar y extraer datos, aportar justificaciones, entre otros.

Teniendo en cuenta los supuestos teóricos anteriores se elabora una secuencia didáctica que en su puesta en práctica permitiera confirmar o rechazar la hipótesis planteada. La secuencia didáctica propuesta en esta investigación sirve como escenario para analizar los argumentos expuestos por los estudiantes durante la resolución de las actividades matemáticas, considerando la interacción tecnológica, el trabajo colaborativo, el debate, la autorreflexión y el modelo de argumentación de Toulmin.

La actividad del estudiante se orientará a favorecer el tránsito entre representaciones (algebraica, numérica y gráfica) en un contexto de experimentación y un trabajo coordinado entre papel, lápiz y tecnología. Además se utilizará el modelo de Toulmin como un instrumento de recolección y análisis de datos del contenido y estructura de los argumentos expuestos por los estudiantes. En la Figura 3 se presenta *el esquema que describe el modelo en el que se ubica el ambiente tecnológico como mediador en la construcción de argumentos matemáticos, el que se obtiene en esta investigación a partir del análisis teórico realizado y de la experimentación.*

La secuencia didáctica se implementó en el Instituto Tecnológico Superior de Tantoyuca, Veracruz-México, participaron 24 estudiantes del segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial. De acuerdo con la metodología ACODESA (Hitt Y González-Martín 2015) se formularon tres etapas, en las dos primeras se establecieron 5 fases de forma secuencial y con tiempos predeterminados (trabajo individual, trabajo en equipo, debate, autorreflexión, proceso de institucionalización), en el desarrollo de la tercera etapa no se consideraron tiempos predeterminados.

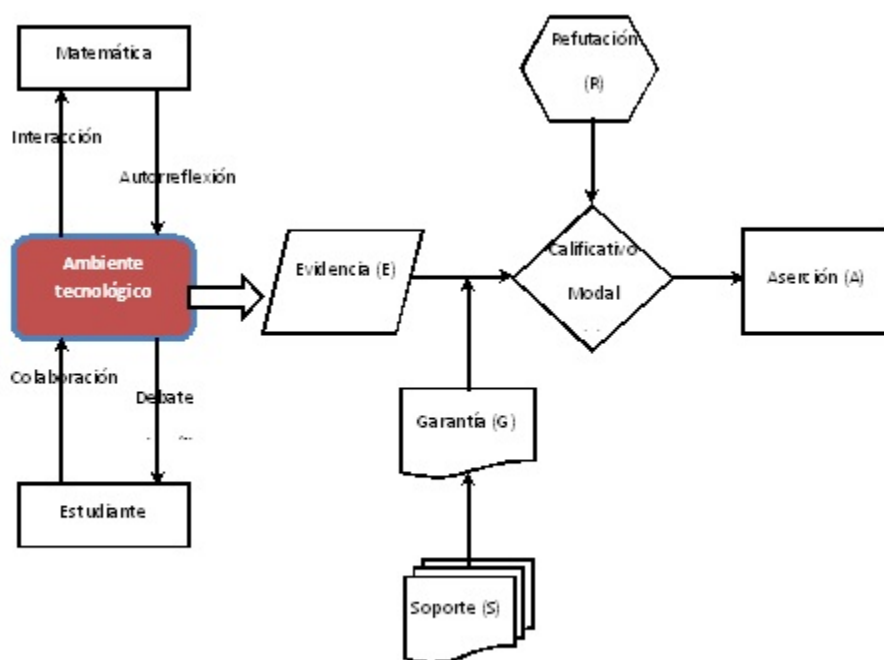


FIGURA 3. El ambiente tecnológico como mediador en la construcción de argumentos matemáticos.

Fuente: diseño propio

Etapas 1: situación problema contextual. Para la puesta en práctica de la secuencia didáctica se utilizaron *situaciones problema de la industria petroquímica.*

Intención matemática del problema: Elaborar dibujos a escala, con el propósito de representar la situación problema, considerando las especificaciones dadas y aplicar teoremas o métodos. Recuperar conocimientos previos para al aplicarlos obtener el modelo matemático (función) que representa la situación problema y aplicar teoremas usando las condiciones solicitadas por el teorema. Compartir resultados obtenidos a lápiz y papel y dar cuenta de las ventajas y desventajas de usar los teoremas y construir una maqueta a escala considerando los datos obtenidos en los incisos anteriores.

Intención didáctica. Deben formular una primera aproximación de la representación gráfica del modelo matemático de la situación con: papel, reglas, compás, juego de escuadras, plumones, calculadora, etc. Apoyados del GeoGebra, harán comparaciones entre las representaciones para contrastar características y discutir diferencias. Formularán predicciones sobre el comportamiento de la función desde la gráfica.

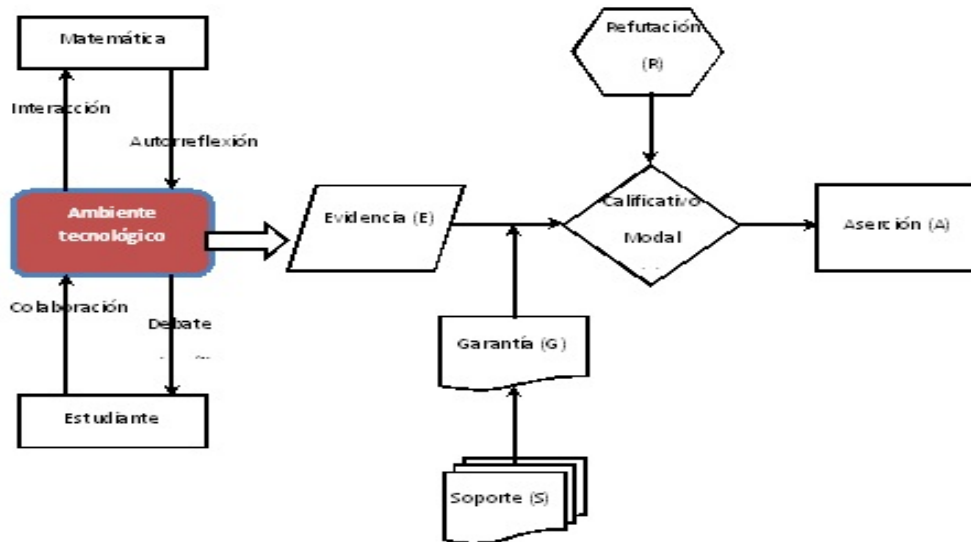


FIGURA 4. El ambiente tecnológico como mediador en la construcción de argumentos matemáticos.

Etapa 2: utilización de nuevos problemas. Se plantearon 10 problemas contextuales (Ingeniería Industrial), relacionados con otras asignaturas del mismo semestre.

Intención matemática. Acercamiento a conocimientos previos: función, utilización de propiedades, generalización de teoremas y visualización de los efectos de las variaciones encontradas. Comparación de los resultados obtenidos al usar las condiciones dadas contra los valores de las tablas realizadas.

Intención didáctica. Se enfrentan a problemas que conducen a debates muy puntuales y respuestas específicas, presentan conjeturas y justificaciones a través de la articulación entre representaciones basado en un trabajo equilibrado entre papel, lápiz y tecnología.

Etapa 3: utilización de ejemplos-contraejemplos que conducen a generalizaciones de lo estudiado hasta el momento.

Intención matemática. En el ejercicio 1 (ejemplo con varios incisos del mismo tipo) se solicitó justificar cada uno. Los estudiantes usaron el GeoGebra con la función *deslizador*, como control de forma remota, pero dentro del área de trabajo, que permite *mover* o *deslizar* un punto sobre una figura, visualizándose una animación.

En el ejercicio 2 (contraejemplos), con 6 contraejemplos que se solicitan justificaciones, esto con la intención que los estudiantes apliquen las propiedades. Se pide analizar las características de las funciones para aplicar la propiedad que corresponda. Para realizar estas actividades se necesita transitar entre representaciones (gráfica, numérica y algebraica) con la intención de encontrar datos que justifiquen los resultados

Intención matemática. Usar las propiedades adecuadas para cada caso.

Intención didáctica. Deben confrontar ejemplos y contraejemplos relacionados con el concepto en estudio para justificar el resultado, trabajan en diferentes registros de representación y articulan las tareas papel, lápiz y tecnología.

En cada caso exploran, y experimentan usando la función *deslizador* del GeoGebra para justificar los resultados. Para la valoración de los resultados obtenidos se recolectaron primeramente los datos. Como instrumento para la recolección y el análisis de los datos se empleó el modelo de Toulmin con el propósito de describir la construcción, contenido y estructura de los argumentos al transitar entre diferentes representaciones durante el desarrollo de sus actividades a *papel-lápiz y tecnología*.

De los 24 estudiantes, se eligieron cuatro que mostraron disposición y voluntad de participar en la etapa de entrevista semiestructurada; ellos se organizaron en dos equipos (mujer y hombre), el entrevistador (investigador) tuvo la función de coordinar la entrevista. En la entrevista se les presentó una consigna para ser resuelta de forma colaborativa durante 60 minutos previos al diálogo. La entrevista se estructuró con cuestionamientos flexibles alrededor de *un ejercicio no rutinario* (contraejemplo). Su intención fue que verbalizaran sus ideas respecto a los elementos del modelo e identificar las características de los argumentos expuestos al realizar sus tareas en un ambiente tecnológico. Se prestó especial atención en el uso del *calificativo modal y la refutación* para investigar la fortaleza de los argumentos expuestos.

Los resultados condujeron a reflexiones sobre el papel que tiene el ambiente tecnológico en un trabajo articulado: individual, colaborativo, debate y autorreflexión, en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos; por ejemplo la pareja 2 construyó un esquema argumentativo muy fundamentado y la pareja 1 no lo logró adecuadamente. Es importante matizar, la estrecha relación de la visualización para sostener argumentos y exponer algunas excepciones de sus argumentos. Al variar parámetros usando la función deslizador, fue necesario analizar el comportamiento (visualizar) para extraer datos y desarrollar ideas.

La actividad matemática denominada *arrastre-conjetura* en un contexto de uso de tecnología, describe procesos cognitivos que ocurren en la producción de conjeturas (Baccaglioni; Mariotti, 2010). En ella se desarrollan ideas en la fase de exploración que evolucionan hasta la formulación de conjeturas. Al usar la función *deslizador*, los estudiantes construyeron la tabla de convergencia que propició el tránsito y articulación entre representaciones que permitió obtener los datos y exponer analogías para las justificaciones. El análisis de los cambios observados ayudó a los estudiantes a formular justificaciones matemáticas a través de la inducción y búsqueda de patrones.

Por tanto se puede afirmar que la actividad matemática en un ambiente de trabajo individual, colaborativo, de debate, y autorreflexión favorece un contexto de trabajo matemático en el que los estudiantes exponen sus ideas y razonamientos y desafían las afirmaciones de los demás integrantes para lograr el objetivo de búsqueda de consensos. Los estudiantes y el profesor podrían iniciar un debate en el aula en la que las conjeturas y justificaciones encontradas podrían llegar a ser demostraciones formales. Este modelo de trabajo, se fortalece cuando los estudiantes realizan una transferencia de información entre las representaciones matemáticas, ya que se ven motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas.

Se coincide con lo señalado en Álvarez; Hernández, Cabrerías y Herrero (2013) en que este tipo de diseños en ambientes tecnológico dinámicos, permite a los estudiantes explorar los conceptos, formular sus propias conjeturas, probar las conjeturas y discutir las en un ambiente de clase general. Este modelo de trabajo se fortalece cuando los estudiantes realizan una transferencia de información entre las representaciones matemáticas, ya que se ven motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas. El acto de dar una explicación o argumentación para una solución no es un comportamiento habitual entre los alumnos, sino que debe ser construido como parte del *contrato didáctico* en el aula de matemáticas.

III. CONCLUSIONES

Se logra articular el modelo Toulmin en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, con la metodología ACODESA, realizando aportaciones a esta, al incorporar a los momentos específicos para el trabajo individual, en equipo y debate grupal, en un enfoque que asume el aprendizaje cooperativo, el debate científico y la autorreflexión, el uso del ambiente tecnológico, y la utilización de contraejemplos, conjeturas y problemas abiertos, logrando una conjugación perfecta en la determinación de argumentos matemáticos con la utilización de conceptos matemáticos.

La elección del software de geometría dinámica (Geogebra) que se caracteriza por tener elementos como el *deslizador*, permite a los usuarios interactuar dinámicamente y observar cómo otros elementos responden a las condiciones alteradas, lo que en el modelo de actividad matemática denominada *arrastre-conjetura* describe procesos cognitivos que ocurren durante la producción de conjeturas.

El ambiente de trabajo colaborativo, se fortalece cuando se realizan transferencias de información entre las representaciones matemáticas [gráfica, numérica y algebraica] mediante un trabajo equilibrado y articulado *papel-lápiz-tecnología*, al verse motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas.

REFERENCIAS

- Alavarado, A.; González, M. T. (2010). *La implicación lógica en el proceso de la demostración matemática: estudio de un caso*. Enseñanza de las ciencias, V. 28, pp. 73-84. 2010.
- Álvarez, A; Hernández, L; Cabrerías, J.F y Herrero, E. (2013). *Estudio de las dimensiones de la integración de las TIC en una universidad tecnológica cubana*. Revista Cubana de Ingeniería. ISSN 2223 -1781, Vol. 4, pp. 5 -14.
- ANUIES (2013). *Estatuto de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior de la República Mexicana*, A.C. México: ANUIES.
- Arriaga, M. (2015). *El diagnóstico educativo, una importante herramienta para elevar la calidad de la educación en manos de los docentes*. Atenas. Vol.4. No. 31- Págs. 63-75
- Baccaglioni-Frank, A.; Mariotti, M. A. (2010). *Generating Conjectures in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Mode*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol. 15, pp. 225-253.
- Baccaglioni Frank, A., Mariotti, M. A. (2010). *Generating Conjectures in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Mode*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 15, pp. 225-253. 2010.
- Borba, M.; Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. USA: Springer, 2005.
- Borges, J. T. y Montes de Oca, L. (2014). *Las formas de trabajo y de pensamiento de la matemática en los recursos de un software educativo*. Atenas. Vol. 2 No. 26. Abril-junio.
- Cuesta; A. y Escalante. J. E. (2014). *Competencias algebraicas: ¿qué dominan los estudiantes universitarios*. Atenas Vol. 2 No. 26 Abril-junio.
- Douek, N. (2007). *Some remarks about argumentation and proof*. In BOERO, P. (Ed.) *Theorems in School: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 163-181.
- Duval, R. (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. In HITT, F. (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp.173-201.
- Duval, R. (2000). *Basic Issues for Research in Mathematics Education, In 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME24)*, Hiroshima. Japón, pp. 55-69.
- García, H. y Tintorer, O. (2016). *Organización de la actividad de situaciones problema en Matemática*. Revista Atenas. Vol 3, pp. 31 – 46.
- Gibert, E. (2012). *Una alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje en las clases de la asignatura Matemática en la Educación Secundaria Básica*. Tesis en opción al Grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”, La Habana.
- Gibert, E., Ballester, S. (2013). *Promoviendo el aprender a aprender matemática en las clases de la educación secundaria básica*. Atenas. Vol 4. pp. 103-118.
- Goizueta, M.; Planas, N. (2013). *Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas*. Enseñanza de las Ciencias, Vol. 31, No.1, pp. 61-78.
- González-Martín, A. S. (2005). *Use of examples and counterexamples in University teaching: The Improper Integral*. In *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Virginia, USA, pp. 1-7.

- González-Martín, A. S.; Camacho, M. (2004). *What is firsts-year mathematics students' actual understanding about improper integration?*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 35, No.1, pp. 73-89.
- Gutiérrez, Y. S. (2015). *Prácticas pedagógicas y apropiación de las TIC en los docentes del colegio Nuevo Reino de Granada*. Universidad de Manizales. Colombia.
- Hernández, L., Acevedo, J.; Martínez, C. y Cruz, B. (2014). *El uso de las TIC en el aula: un análisis en términos de efectividad y eficacia*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Buenos Aires.
- Hitt, F. (2007). *Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion*. In Baron, M.; Guin, D.; Trouche, L. (Eds.) Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage: conception et usages, regards croisés, Col. Systèmes de formation et d'enseignement, pp. 1-25.
- Hitt, F.; González-Martín, A. S. (2015). *Covariation between variables in a modelling process*. The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. Educational Studies in Mathematics, Vol. 88, No. 2, pp. 201–219.
- Inglis, M.; Mejía Ramos, J. P. (2005). *La fuerza de la asección y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas*, Revista EMA, Vol. 10, No. 3, pp. 328-353. 2005.
- Inglis, M.; Mejía-Ramos, J., Simpson, A. (2007). *Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 66, No.1, pp. 3-21.
- Lalangui, J., Valarezo, J. (2017). *El aprendizaje, la era del conocimiento y las TIC ante la realidad Universitaria Ecuatoriana*. Atenas. Vol 2. No. 38. abril-junio, pp. 51 – 65.
- Mayorga, A., Navas, Y. y Pacheco, S. (2014). *Desafíos pedagógicos ante el uso de las tecnologías de la información*. YACHANA, Revista Científica, Vol. 3, No. 2, pp. 126-137.
- Okada, T.; Simon, H. A. (1997). *Collaborative discovery in a scientific domain*. Cognitive Science, Vol. 21, No. 2, pp. 109-146.
- Rodríguez, L. (2015). *El método de proyecto para la formulación de problemas matemáticos*. Atenas. Vol. 4. No. 32. Octubre-diciembre. pp. 100-113.
- Socas, M., Ruano, R. (2014). *La competencia matemática formal*. Aplicaciones al análisis del contenido y al desarrollo curricular en matemáticas. Atenas. Vol. 2, No. 26.
- Tall, D. (2009). *Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism*. In International Congress on Mathematical Education, Taipei, Taiwan, Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. Taiwan, pp. 1-7.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press.
- UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura). (2014). *Políticas TIC en los sistemas educativos de América Latina*. Francia.
- UNESCO. (2013). *Enfoques estratégicos sobre las Tics en Educación en América Latina y El Caribe*. Chile.
- Vacchieri, A. (2013). *Estado del arte sobre la gestión de las políticas de integración de computadoras y dispositivos móviles en los sistemas educativos*. Editorial Argentina.