



Fuerza aerodinámica y coeficiente de arrastre de conos que caen el aire

Alejandro González y Hernández^a

^aDepartamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Investigación Científica, C.U., Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510. Ciudad de México, México.

ARTICLE INFO

Received: 15 de enero de 2022

Accepted: 22 de abril de 2022

Available on-line: 1 de junio de 2022

Keywords: Dynamics, air resistance, terminal velocity, drag coefficient.

E-mail addresses

agh@ciencias.unam.mx.

ISSN 2007-9847

© 2022 Institute of Science Education.
All rights reserved

ABSTRACT

A right cone of paper falling from rest in air, subject to the force of gravity and the force of air resistance, reaches its terminal velocity as these two forces balance. The force of air resistance that in principle can be proportional to the speed of the mobile (viscous force) or to the square of the speed (aerodynamic drag force) is defined as aerodynamic drag force by the experiment that we propose here to measure the speed terminal of the cone in its fall in the air. The experiment carried out for paper cones allows determining the drag coefficient C_D that characterizes the aerodynamics of the cone that moves through the wind that it face in its fall. In this paper, the drag coefficients for different aerodynamic shapes of the cone that depend on their design geometry are reported.

Un cono recto de papel que cae desde el reposo en el aire, sujeto a la fuerza de la gravedad y a la fuerza de resistencia del aire, alcanza su velocidad terminal al balancearse estas dos fuerzas. La fuerza de resistencia del aire que en principio puede ser proporcional a la velocidad del móvil (fuerza viscosa) o al cuadrado de la velocidad (fuerza de arrastre aerodinámico) queda definida como fuerza de arrastre aerodinámico por el experimento que aquí proponemos para medir la velocidad terminal del cono en su caída en el aire. El experimento que se realiza para conos de papel permite determinar el coeficiente de arrastre C_D que caracteriza la aerodinámica del cono que se mueve a través del viento que enfrenta en su caída. En este escrito se reportan los coeficientes de arrastre para diferentes formas aerodinámicas del cono que dependen de su geometría de diseño.

I. INTRODUCCIÓN

Un objeto que se mueve en un fluido (aire, agua, aceite, etc.) se ve sujeto a la fuerza de resistencia del medio que se opone a su movimiento.

Esta fuerza de resistencia del fluido al paso de los objetos depende de propiedades del fluido, del tamaño, la forma y la velocidad relativa del objeto respecto del fluido.

Por otra parte, si la velocidad de desplazamiento del objeto respecto del fluido es baja o alta, la fuerza que se opone al movimiento del objeto puede ser proporcional a su velocidad o proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto [1]. Esto es;

$$f_r = -\kappa|v^n|v, \quad (1)$$

con κ la constante de proporcionalidad y $n = 0$ o $n = 1$.

Si $n = 0$, la fuerza de resistencia en (1) es proporcional a la velocidad y el objeto se mueve a baja velocidad en el fluido, si $n = 1$ la fuerza en (1) es proporcional al cuadrado de la velocidad y el objeto se mueve a alta velocidad respecto al fluido. El signo negativo en (1) indica que la fuerza de resistencia del fluido se ejerce en el sentido negativo de la velocidad relativa del objeto respecto del fluido, es decir, opuesta al movimiento del objeto en el fluido. Las unidades de κ son kg/s o kg/m según sea la fuerza, viscosa o de arrastre aerodinámico.

Definir para un movimiento dado de un objeto en un fluido cuál de las dos fuerzas expresadas en (1) modela la dinámica del movimiento es un problema que abordaremos en los siguientes párrafos.

II. CAÍDA EN EL AIRE

En el otoño, las hojas de los árboles caen bamboleándose grácilmente en el aire. Las semillas de algunos árboles, como las semillas del arce, giran como las hélices de un helicóptero conforme descienden al suelo, de esta manera, el viento tiene oportunidad de dispersarlas a distancias más lejanas para su fecundación. Hojas y semillas caen al piso muy despacio, desafiando la ley de caída libre de Galileo Galilei [2].

La caída de hojas o semillas de árboles, salto con paracaídas cerrado (*skydiving* o paracaidismo acrobático), etc., en realidad no es una caída libre sujeto exclusivamente a la fuerza de la gravedad, como es una caída en el vacío. La fuerza del aire que forma la atmósfera ejerce una fuerza de resistencia sobre el objeto que cae e impide que la velocidad de caída aumente linealmente con el tiempo; de hecho, dependiendo de la velocidad del objeto, esta fuerza aumenta en sentido opuesto a la fuerza de gravedad hasta que la anula y el descenso del objeto continúa con velocidad terminal constante, pequeña o grande, pero velocidad constante.

Sin embargo ¿cómo saber si la fuerza de resistencia del aire es de tipo viscosa o es una fuerza de arrastre aerodinámico sobre el objeto?

Como en el experimento de Galileo Galilei de la caída libre de los objetos, el experimento es crucial para definir el modelo que se ajusta a la caída de objetos en un fluido, como el aire.

Pero el movimiento de objetos que caen en el aire es más complejo que la caída en el vacío donde Galileo mostró que no depende ni de la masa ni de la forma del objeto o si gira o no alrededor de alguno de sus ejes de simetría.

Por ello, es necesario elegir un objeto, cuyas variables estén bajo control del experimentador, como la masa, su área de impacto con la corriente de aire que enfrenta en su caída y su forma aerodinámica. Así como, la obtención de resultados de caída del objeto en el aire que sean fáciles de reproducir.

Un cono de papel de fácil diseño es un objeto ligero (como una hoja de árbol) que puede construirse con diferentes áreas transversales de impacto con el aire y formas aerodinámicas, el cual cae al piso con estabilidad, sin girar y mostrando diferentes comportamientos en su caída, como caer muy lentamente o muy rápidamente.

Dados estos comportamientos extremos de caída, de ¿qué dependen?, ¿cuál es la dinámica que sigue el cono en su caída en el aire?, ¿cómo afecta a esa dinámica la forma aerodinámica del objeto?

Para responder a estas preguntas, se revisará la teoría al respecto para establecer una relación que determine el tipo de fuerza de resistencia del aire sobre el objeto y se hará el experimento de la caída del cono que defina esta fuerza.

III. DINÁMICA DE LA CAÍDA DE UN OBJETO EN EL AIRE

Un cono de masa m al caer de una altura H , desde el reposo al piso está sujeto a la fuerza de gravedad $-mg$ y a la fuerza f del aire que se opone a su movimiento.

La fuerza f del fluido que se opone a la caída del cono puede ser una fuerza f_v preponderantemente viscosa o una fuerza de arrastre aerodinámico f_D que supera a la fuerza viscosa. La fuerza viscosa f_v es proporcional a la velocidad y la fuerza f_D de arrastre aerodinámico es proporcional a la velocidad al cuadrado.

En cada caso, la segunda ley de Newton se aplica para determinar la dinámica de la caída del cono de la siguiente forma:

$$ma = -mg - \kappa|v^n|v, \quad (2)$$

con n igual a cero (para la fuerza viscosas) o n igual a uno (para la fuerza de arrastre aerodinámico).

Para determinar el valor de n se considera la velocidad terminal del movimiento. Esto es, al caer el cono desde el reposo, la rapidez del cono se va incrementando hasta que la fuerza del fluido sobre el cono iguala a su peso, la aceleración del cono se anula y el móvil alcanza la llamada velocidad terminal v_t , que es una velocidad constante que se determina por:

$$-mg - \kappa|v_T^n|v_T = 0, \quad (3)$$

o bien,

$$|v_T^n|v_T = -\frac{mg}{\kappa}. \quad (4)$$

En la ecuación (4) existen dos posibilidades, según sea $n = 0$ o 1.

Para $n = 0$ (fuerza viscosa), se tiene la siguiente expresión para la velocidad terminal:

$$v_T = -\frac{mg}{\kappa}, \quad (5)$$

y para $n = 1$ (fuerza de arrastre aerodinámico), la expresión correspondiente es:

$$v_T = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}. \quad (6)$$

En las dos expresiones anteriores, se observa respectivamente que la velocidad terminal depende de la masa m del cono o de la *raíz cuadrada de m* .

Para determinar cuál de las dos expresiones (5) o (6) es la que se aplica a la caída de conos se hará el experimento de caída del cono, pero antes se discutirá el diseño y la geometría del cono que depende de los parámetros de diseño [3] y que afecta, juntamente con los parámetros del aire, su caída en el aire.

IV. DISEÑO DE CONOS RECTOS.

Para construir un cono recto, en una hoja de papel se dibuja un círculo de radio R_0 , y dos radios del cono separados un ángulo θ_0 (Figura 1a).

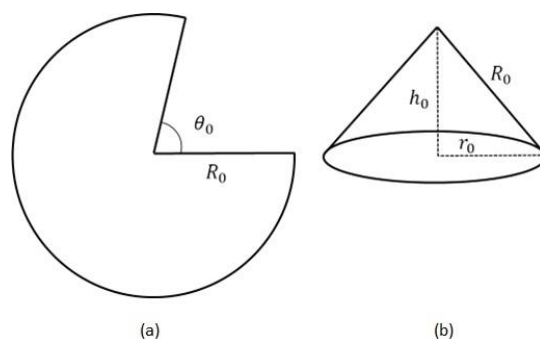


FIGURA 1. (a) Diseño geométrico del cono recto, (b) Construcción del cono recto.

Se recorta el semicírculo que queda sin el área entre los radios. Este semicírculo se dobla por sus orillas radiales, que se pegan con cinta adhesiva, para formar un cono recto de radio r_0 de la base, altura h_0 y generatriz R_0 (Figura 1b).

V. GEOMETRÍA

La geometría del cono recto de la Figura 1b depende de los parámetros de diseño R_0 y θ_0 , según las siguientes fórmulas matemáticas.

El perímetro P de la base del cono está dado por:

$$P = 2\pi r_0 = 2\pi R_0 - R_0\theta_0, \quad (7)$$

de donde

$$r_0 = R_0 \left(1 - \frac{\theta_0}{2\pi}\right), \quad (8)$$

El área de la base es entonces:

$$A_0 = \pi r_0^2 = \pi R_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0}{2\pi}\right)^2, \quad (9)$$

La altura del cono es:

$$h_0 = \sqrt{R_0^2 - r_0^2} = \frac{R_0}{2\pi} \sqrt{(4\pi - \theta_0)\theta_0}, \quad (10)$$

El ángulo del vértice del cono se determina a partir de:

$$\tan \phi_0 = \frac{r_0}{h_0} = \frac{2\pi - \theta_0}{\sqrt{(4\pi - \theta_0)\theta_0}}, \quad (11)$$

por lo tanto:

$$\phi_0 = \text{atan} \left(\frac{2\pi - \theta_0}{\sqrt{(4\pi - \theta_0)\theta_0}} \right). \quad (12)$$

Se observa que el ángulo ϕ_0 del vértice del cono depende exclusivamente del ángulo θ_0 de diseño. Este ángulo determina la forma aerodinámica del cono, si θ_0 es pequeño, ϕ_0 está próximo a 90° , el cono es muy plano y su velocidad de caída lenta, si θ_0 es grande, ϕ_0 es pequeño, el cono es agudo y su velocidad de caída es rápida.

VI. DETERMINACIÓN DE LA FUERZA DEL FLUIDO SOBRE EL CONO

Con el diseño del cono de la Figura 1a, se construye un cono de papel de masa m_0 , base A_0 y altura h_0 como el de la Figura 1b y se deja caer de una altura H al piso, desde el reposo, con el propósito de que el cono alcance la velocidad terminal en su caída.

El movimiento del cono se filma con una cámara de celular a 220 fps, la captura de datos experimentales del movimiento se hace con *Tracker* (software de captura y análisis de vídeos de movimientos) y su análisis se realiza en una hoja de cálculo para determinar la velocidad terminal del cono. Luego, el cono se carga en su interior con pequeñas bolas de plastilina de masas $m_i = im/p$ (con $i = 1,2,3, \dots$, y $p = 5$) que aumentan la masa del cono a $m = m_0 + m_i$, sin alterar su área transversal de impacto con el aire o sus parámetros de forma aerodinámica.

El experimento anterior se repite con las masas m_i agregadas a la masa m_0 para $i = 1,2, \dots, 6$ para determinar las velocidades terminales correspondientes a cada una de estas masas.

Los resultados de velocidades terminales como función de la masa del cono se reportan en la Tabla 1. Estos resultados se utilizan para hacer las gráficas de v_t vs m y v_t^2 vs m y determinar si alguna de estas dos gráficas sigue un comportamiento lineal a partir del origen que permita definir el tipo de fuerza que el aire ejerce sobre los conos en su caída al piso, ya que indicaría una proporcionalidad directa entre la variable v_t o v_t^2 con m .

El análisis visual de la gráfica v_t vs m indica que no es una recta, es decir, no hay una proporcionalidad directa entre la velocidad terminal y la masa del cono. Este resultado indica que la fuerza viscosa que corresponde a esta proporcionalidad, según el experimento no es significativa en los experimentos del cono realizados.

TABLA 1. Velocidad terminal de un cono con masa variable.

| # | m (kg) | v_t (m/s) | v_t^2 (m^2/s^2) |
|---|--------|-------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0.00 | 0.00 |
| 1 | 0.0007 | 1.58 | 2.51 |
| 2 | 0.0011 | 1.99 | 3.97 |
| 3 | 0.0014 | 2.49 | 6.19 |
| 4 | 0.0018 | 2.51 | 6.30 |
| 5 | 0.0021 | 2.94 | 8.66 |
| 6 | 0.0025 | 2.94 | 8.67 |
| 7 | 0.0028 | 3.37 | 11.35 |

Sin embargo, el ajuste de la gráfica v_t vs m , por mínimos cuadrados da como resultado la función:

$$|v_T| = 62.6\sqrt{m}, \quad (13)$$

que indica, según la expresión (6), una relación de proporcionalidad directa entre la velocidad terminal y la raíz cuadrada de la masa.

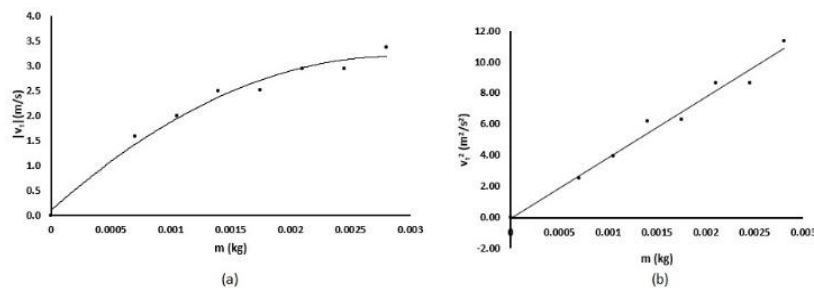


FIGURA 2. Gráficas de (a) v_t vs m , y (b) v_t^2 vs m .

La relación cuadrática se confirma al al graficar el cambio de variable v_t^2 vs m en la Figura 1.b, que muestra el comportamiento lineal esperado entre las variables m y v_t^2 , cuya ecuación de ajuste por mínimos cuadrados es:

$$v_t^2 = 3.9 \times 10^3 m. \quad (14)$$

De esta manera, el modelo de proporcionalidad directa entre v_t^2 y m , indica que es la fuerza de arrastre la indicada para modelar la caída del cono en el aire, ya que el experimento está de acuerdo con la expresión (6) que se deduce de esta fuerza.

El experimento ha sido crucial para definir la fuerza del aire que se aplica en la dinámica de la caída del cono, por lo que solo nos referiremos a la fuerza de arrastre aerodinámico en lo que sigue.

VII. MEDICIÓN DEL COEFICIENTE DE ARRASTRE C_D

La ecuación de movimiento de la caída del cono, con la fuerza de arrastre aerodinámico está dada por:

$$ma = -mg - \kappa|v|v, \quad (15)$$

o bien,

$$ma = -mg + \kappa v^2, \quad (16)$$

si se considera que la velocidad del cono en su caída al piso es negativa.

Si el objeto alcanza su velocidad terminal, como ya se mencionó anteriormente, la aceleración del movimiento es cero, y

$$v_T^2 = \frac{g}{\kappa} m, \quad (17)$$

como el resultado experimental en (14).

Por lo tanto, la pendiente de la recta, es según la expresión (3b), el cociente:

$$\frac{g}{\kappa} = (3.9 \pm 0.2) \times 10^3 \frac{m^2}{kg s^2}, \quad (18)$$

expresión, donde se ha incluido el error experimental en la medición de la pendiente de la recta (2b).

Despejando κ de (15), se obtiene:

$$\kappa = (2.5 \pm 0,1) \times 10^{-3} \frac{kg}{m}. \quad (19)$$

De acuerdo con la teoría de la fuerza de arrastre aerodinámico, la constante κ está dada por:

$$\kappa = \frac{\rho A C_D}{2}, \quad (20)$$

con ρ la densidad del aire (igual a 1 kg/m^3 en el lugar donde se hizo el experimento) A el área transversal del cono perpendicular a la corriente del aire en m^2 y C_D el coeficiente de arrastre que es una cantidad adimensional.

Despejando C_D en (20) se tiene:

$$C_D = \frac{2\kappa}{\rho A}, \quad (21)$$

por lo que el valor de $C_D = 0.79 \pm 0.08$.

VIII. EL COEFICIENTE DE ARRASTRE C_D PARA DIFERENTES ÁNGULOS ϕ

El coeficiente de arrastre C_D tiene que ver con la forma aerodinámica del cono. Si el cono es muy plano, el valor de C_D es grande, pero si el cono es agudo, su valor es pequeño, en cada caso, la fuerza del aire que se ejerce sobre el cono es grande o pequeña respectivamente.

Sin embargo, la densidad del medio y el área transversal del cono también afectan el valor de la fuerza de resistencia del aire, por lo que en el experimento para medir C_D para diferentes valores del ángulo del vértice ϕ_0 , se mantienen constantes.

La densidad del aire es constante, ya que la caída del cono ocurre con aire quieto y la altura de caída es insignificante para notar cualquier variación de la densidad del aire por esta causa.

El área transversal, según la expresión (9) se puede mantener constante, si:

$$\pi R^2 \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 = A = cte. \quad (22)$$

Ello implica que se puede diseñar conos que con área constante a partir de la siguiente regla:

$$R = \frac{\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}}{1 - \frac{\theta}{2\pi}}. \quad (23)$$

Puesto que el ángulo ϕ depende de θ según la expresión (12), los conos construidos variando θ y en consecuencia R que depende de θ para A constante, tendrán una forma aerodinámica que variará de conos planos a conos agudos según θ vaya aumentando.

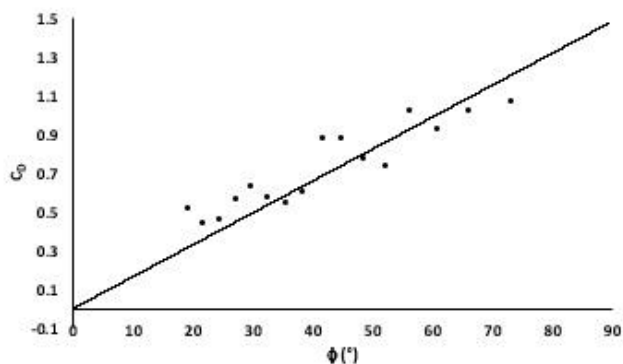
En estas condiciones, se repite el experimento para medir la velocidad terminal de conos en su caída para diferentes ángulos de diseño θ con sus masas ($m = 0.5 \pm 0.05$ g) y áreas transversales ($A = 1.53 \pm 0.007$) $\times 10^{-3}$ m²) constantes. En este caso, el coeficiente de arrastre C_D depende solo de las diferentes formas aerodinámicas de los conos, que depende del ángulo ϕ .

En la Tabla 2 se muestran los valores obtenidos de θ , ϕ y C_D para diferentes valores del ángulo de diseño.

En la Figura 3 se muestra la gráfica de C_D vs ϕ . La recta de ajuste por mínimos cuadrados se hace pasar por el origen, ya que, cuando el ángulo de diseño θ está cercano a 2π , el ángulo ϕ es cercano a cero y el cono es extremadamente agudo y el coeficiente C_D es extremadamente pequeño. En el límite, para un área A constante, cuando θ tiende a 2π , la generatriz R del cono tiende a infinito y el ángulo ϕ tiende a cero. Ello significa, que el cono se aproxima a una recta y su coeficiente de arrastre C_D tiende a cero.

TABLA 2. Coeficiente de arrastre C_D en función de ϕ .

| # | θ (°) | ϕ (°) | C_D |
|----|--------------|------------|-------|
| 1 | 15 | 73.4 | 1.07 |
| 2 | 30 | 66.4 | 1.01 |
| 3 | 45 | 61.0 | 0.92 |
| 4 | 60 | 56.4 | 1.01 |
| 5 | 75 | 52.3 | 0.73 |
| 6 | 90 | 48.6 | 0.77 |
| 7 | 105 | 45.1 | 0.87 |
| 8 | 120 | 41.8 | 0.88 |
| 9 | 135 | 38.7 | 0.60 |
| 10 | 150 | 35.7 | 0.54 |
| 11 | 165 | 32.8 | 0.57 |
| 12 | 180 | 30.0 | 0.63 |
| 13 | 195 | 27.3 | 0.56 |
| 14 | 210 | 24.6 | 0.46 |
| 15 | 225 | 22.0 | 0.44 |
| 16 | 240 | 19.5 | 0.51 |

FIGURA 3. Gráficas C_D vs ϕ de los datos experimentales y ajuste lineal por mínimos cuadrados, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.979$.

La ecuación de la recta de la Figura 3, está dada por:

$$C_D = 0.016\phi. \quad (24)$$

El intervalo de validez de la relación en (24) en ϕ es de 0 a $\frac{\pi}{2}$ (de conos agudos a conos planos) y en C_D de 0 a 1.5.

La pendiente de la recta en (24) depende del A transversal. Al cambiar el área transversal A (que se sigue manteniendo constante), la pendiente de la recta disminuye para valores pequeños de A y aumenta para valores grandes de A .

IX. DISCUSIÓN

El experimento que se ha realizado aquí para determinar el tipo de fuerzas que se ejerce sobre un cono de papel (con área transversal pequeña) determinó que para las velocidades terminales alcanzadas por el cono para diferentes masas (sin variar ninguno de sus otros parámetros que lo caracterizan), la fuerza del aire que se ejerce sobre el cono en su caída al piso es del tipo de arrastre aerodinámico, es decir proporcional al cuadrado de la velocidad.

Al conocer esta fuerza es posible formular la ecuación de movimiento adecuada, como lo muestra la expresión (16), para determinar la dinámica completa del movimiento del cono en su caída en el aire.

Sin embargo, hay que determinar algunos parámetros para resolver esta ecuación de movimiento, como la masa del cono, la densidad del aire de la localidad donde se realiza el experimento, el área transversal del cono (el área de su base) y el coeficiente de arrastre, que es un parámetro que tiene que ver con las características aerodinámicas del cono.

Este coeficiente de arrastre varía para diferentes configuraciones aerodinámicas del cono, por lo que hay que determinarlo experimentalmente.

Para ello, se realizó el mismo experimento que se hizo para determinar el tipo de fuerza sobre el cono, pero con diferentes conos de forma aerodinámica diferente (ángulo ϕ diferentes que implica tener conos planos o agudos) para determinar este coeficiente y su dependencia con el ángulo ϕ , que a su vez depende del ángulo de diseño θ que se utilizaron para construir los conos (ver Figura 1a).

El resultado ha sido una línea recta (ver Figura 3) que establece una relación lineal entre el coeficiente de arrastre C_D y el ángulo ϕ , y en consecuencia el ángulo θ (ya que ϕ depende θ). De esta forma, no solo se determina el coeficiente de arrastre para una familia de conos que mantiene su área transversal constante, sino que se tiene un método de construcción para el diseño de los conos de esta familia.

Estudios numéricos sobre el coeficiente de arrastre [4] hacen un estudio que generalizan la medición de este parámetro para esferas, cilindros y conos, sin embargo, las bases para estos estudios son los mismos que los que aquí hemos usado.

X. CONCLUSIÓN

Se han diseñado conos de papel utilizando dos parámetros de diseño, que se han aplicado para construir conos de diferentes formas aerodinámicas. Con uno de estos conos, se ha podido definir, a partir del experimento, la fuerza de resistencia del aire que se opone a la caída del cono de papel, y se ha medido experimentalmente el coeficiente de arrastre aerodinámico que caracteriza esta fuerza.

Se ha encontrado una relación que determina el coeficiente de arrastre de conos de forma aerodinámica variable con el ángulo del vértice de cada cono, manteniendo el resto de los parámetros constantes. Éste es un ángulo de ataque de los conos en su paso a través del aire.

Todo lo anterior, con el objetivo de ir entendiendo el movimiento de estos objetos en el aire, que afecta a proyectiles que se mueven en este medio, como cohetes, aviones, balas y misiles con puntas cónicas, que siguen las mismas leyes de la dinámica, que las que hemos utilizado aquí para nuestro estudio.

El experimento aquí descrito con diferentes conos es sencillo de realizar en el cualquier laboratorio de enseñanza de la mecánica newtoniana. Para los estudiantes de física o ingeniería es formativo, ya que exige manejar las técnicas experimentales y las deducciones teóricas con cuidado para llegar a los resultados esperados.

REFERENCIAS

- [1] French, A. P. (1971). *Using Newton's Law from Newtonian Mechanics*. London. W. W. Norton & Company.
- [2] Sharma, O., Sharma, D. (2021). *How Free is a Fall That Occurs in Real World? European Journal of Applied Sciences*. **9**, pp. 39-53.
- [3] Shah, Sh., Tanwani, N., Sing, S. (2020). *Drag Analysis for Sounding Rocket Nose Cone*. International Research Journal of Engineering and Technology. **7** pp. 2393-2397.

[4] Samantaray, S., K., Mohapatra, S., S. and Munshi, B. (2017). *A numerical study of the wall effects for Newtonian fluid flow over a cone*. Engineering Science and Technology, an International Journal. pp. 1662-1675.