Lat. Am. J. Sci. Educ. 3, 12018 (2016)

Latin American Journal of Science Education

www.lajse.org

Propuesta de enseñanza de las operaciones básicas con vectores basada en la teoría APOE y uso del software GeoGebra

Jesús Enrique Rodríguez Sandoval[a], Ma. Magdalena Sorcia Rocha[b]

[a]Tecnológico Nacional de México, Av. Tecnológico s/n, C.P. 7600, Santiago de Querétaro, Qro. México

[b]Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas s/n, C.P. 76010, Santiago de Querétaro, Qro. México.

ARTICLE INFO

Recibido: 4 de outubro de 2015

Aceptado: 28 de outubro de 2015

Palabras clave:
Algebra lineal.
Geometría.
Teoría Apoe.
Didáctica.
Tecnología.
Física.
Matemáticas.

E-mail:
jrodriguezsandoval@gmail.com,
magdas@uaq.mx

ISSN 2007-9842

ABSTRACT

This paper presents a proposal for the teaching and learning of basic vector operations (addition, dot product and cross product) for engineering students; in which a series of activities to be performed using the software GeoGebra.
The proposal is under the perspective of the APOE theory developed by Ed Dubinsky (Asiala, *et al*., 1997), which has been taken as a reference in research on teaching Linear Algebra in various countries such as France, United States and México. This theory considers that there are five different kinds of essential buildings abstract mathematical concepts to develop: generalization, internalization, encapsulation, coordination and reversal. The activities presented describe the components of the APOE theory, defining its various buildings and related components and constructions.
This sequence is performed in a cycle of three components: activities with the computer in a laboratory using the software GeoGebra, class work on problems related to computer activities and discussion of these problems and their solutions; and exercises to strengthen those who have learned and identify future work.

En este trabajo se hace una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas con vectores (suma, producto punto y producto cruz) para estudiantes de ingeniería; en la cual se desarrollan una serie de actividades para ser realizadas utilizando el software GeoGebra.
La propuesta se realiza bajo la perspectiva de la teoría APOE desarrollada por Ed Dubinsky (Asiala, *et al*., 1997), la cual ha sido tomada como referencia en investigaciones sobre la enseñanza del Álgebra Lineal en diversos países como Francia, Estados Unidos y México. Esta teoría considera que existen cinco distintos tipos de construcciones esenciales para desarrollar conceptos matemáticos abstractos: generalización, interiorización, encapsulamiento, coordinación y reversión. Las actividades que se presentan describen los componentes de la teoría APOE, definen sus diversas construcciones y relacionan los componentes y construcciones.
Esta secuencia didáctica se realiza en un ciclo con tres componentes: actividades con la computadora en un laboratorio utilizando el software GeoGebra, trabajo en clase sobre problemas relacionados con las actividades con la computadora, y discusión de estos problemas y sus soluciones; y ejercicios con objeto de reforzar los que se ha aprendido y señalar el trabajo futuro.

I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra lineal en Nivel Superior ha sido tema de investigación desde muy diversas perspectivas, tales como los tres principios para la enseñanza del Algebra Lineal, postulados por Harel (2000); inspirados por la Teoría del Desarrollo Cognoscitivo de Piaget, los cuales son: el Principio de Concreción, el Principio de Necesidad y el Principio de Generalización; los trabajos realizados recientemente en México, basados en la teoría APOE, principalmente por Asuman Oktaç; por Jean-LucDorier (1999). Éste último, dirige el equipo de investigación en matemática educativa

(DIDIREM or Didactique des mathématiques, L'équipe **DIDIREM** est une équipe de recherche en didactique des mathématiques), (Paris 7, http://www.didirem.math.jussieu.fr/) en la Universidad de Paris, Francia, en la cual se realizaron varios análisis de los trabajos de los estudiantes en la enseñanza ordinaria, también crearon pruebas y entrevistaron a estudiantes y profesores para entender mejor el significado de lo que han llamado "el obstáculo de formalismo", en conjunto con una investigación de la historia del algebra lineal a través de un análisis epistemológico de textos originales del siglo XVII hasta acontecimientos recientes; la propuesta de la comunidad en investigación de educación matemática a nivel universitario (RUMEC or Research in Undergraduate Mathematics Education Community) (Weller *et al*., 2000), la cual basa su trabajo en la teoría APOE, una aproximación para el diseño e implementación de la enseñanza y una metodología para la recopilación y análisis de datos; y finalmente las recomendaciones del grupo de estudio curricular del Algebra Lineal (LACGS) de los Estados Unidos.

II. TEORÍA APOE

La perspectiva teórica APOE inicia con el siguiente enunciado de lo que significa aprender matemáticas.

"El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Asiala, *et al*., 1997).

Hay muchos elementos de la labor educativa que se tocan en esta afirmación. Por ejemplo, el termino tendencia se refiere al hecho de que es muy frecuente que a un estudiante se le plantee una pregunta, digamos en un examen, o en clase, y es posible que parezca que no sabe la respuesta.

Sin embargo, más adelante (sin que haya ninguna experiencia de aprendizaje detectable entre tanto), o aun en una fecha anterior, el estudiante puede dar una respuesta perfectamente razonable. ¿Cómo calificaríamos este desempeño?

De acuerdo, no debe obtener "la calificación completa" porque esto se debe reservar para el caso en que se da una buena respuesta en cualquier momento. Pero el estudiante no debe obtener cero porque esto se debe reservar para el caso en el que el estudiante nunca da una respuesta razonable. Algo intermedio, no hay duda, pero, ¿dónde? Y ¿qué implicaciones tiene esto para los exámenes? Si un estudiante tendrá un desempeño muy diferente en intentos sucesivos y el examen sólo permite un intento, ¿cómo refleja la calificación el hecho de que en un segundo intento el estudiante podría hacerlo mucho mejor o mucho peor?

La idea completa de "situación problemática" se relaciona con la dicotomía desequilibración/reequilibración. El estudiante debe ver el problema en la situación y ser perturbado por éste cuando el aprendizaje se está llevando a cabo. El contexto social se refiere, al menos, al papel del aprendizaje cooperativo.

Pero la parte más importante de esta afirmación, y la que hace específica a las matemáticas, es la parte sobre las construcciones específicas y se describen a continuación.

A continuación se describen los tipos de construcciones mentales: acción, proceso, objeto y esquema, consideradas en la teoría APOE (Asiala *et al*., 1996).

Una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo que es hasta cierto punto externo. Es decir, un individuo cuyo entendimiento de una transformación está limitado a una concepción de acción puede realizar la transformación únicamente reaccionando a indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre qué pasos dar.

Se tienen los siguientes ejemplos de acciones, primero, cuando un estudiante que no es capaz de interpretar una situación como una función a menos que tenga una fórmula para calcular valores está restringido a un concepto de acción de una función; segunda, resolver una ecuación imitando los pasos de la resolución de una ecuación similar y por último, procurar soluciones de una inecuación sustituyendo valores específicos y verificando si satisfacen o no la ecuación.

Si un individuo limita la compresión de un concepto a realizar acciones para obtener una transformación dada, entonces decimos que posee una concepción de acción de dicha transformación. Aunque una acción esté limitada a la construcción de acciones, ésta es crucial al inicio de la comprensión de un concepto (Asiala *et al*., 1996).

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar en realidad dichos pasos. En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas.

En el caso de las funciones, una concepción de proceso permite al sujeto pensar en una función como algo que recibe una o más entradas, o valores de las variables independientes, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que regresa las salidas, o los valores de las variables dependientes, como resultado. Por ejemplo, para entender una función tal como la dada por sen (x), se requiere una concepción proceso del concepto de función porque no se cuenta con instrucciones explícitas para obtener una salida para una entrada dada; con el fin de calcular la función, uno debe imaginar el proceso de asociar un número real con su seno.

Con una concepción de proceso de función, un individuo puede ligar dos o más procesos para construir una composición o invertir el proceso para obtener funciones inversas.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto.

En el curso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo.

Es fácil ver cómo la encapsulación de procesos en objetos y la encapsulación de objetos de regreso a procesos aparecen cuando se piensa en la manipulación de funciones como encontrar la suma, el producto, o cuando se forman conjuntos de funciones.

Una colección de procesos y objetos pueden ser organizados de manera estructurada para formar un esquema. Los esquemas pueden ser tratados como objetos e incluirlos en la organización de esquemas de “alto nivel”.

III. DESARROLLO

El propósito del presente trabajo es diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas con vectores: suma de vectores, producto punto (o producto escalar) y producto vectorial (o producto cruz), así como analizar los resultados, dicho trabajo se realiza desde la perspectiva de la teoría APOE desarrollada por Dubinsky (1996) y utilizando el software GeoGebra. El objetivo de desarrollar esta secuencia didáctica es para que los estudiantes logren llegar al nivel de generalización en las operaciones básicas con vectores.

A continuación se presenta el procedimiento que seguimos para el diseño de la secuencia didáctica para la enseñanza de las operaciones básicas con vectores, basada en la teoría APOE. Al aplicar la teoría APOE básicamente lo que realizamos es proponer lo que se llama una descomposición genética, lo cual significa descomponer los conceptos matemáticos, en este caso las operaciones con vectores, en una secuencia de pasos que lleven a la construcción de conceptos a los estudiantes. En la figura 1, se muestra una propuesta de descomposición genética para las operaciones básicas con vectores y se describe las diferentes etapas de la teoría APOE.

A. Acciones geométricas o algebraicas

Se considera a un estudiante que posee una concepción de acción en las operaciones básicas con vectores:

- Cuando solo puede realizar la suma, multiplicación por un escalar, el producto punto y el producto cruz, de dos vectores algebraica o geométricamente en los espacios de dos y tres dimensiones, para valores específicos de sus componentes.
- Si requiere recibir las instrucciones precisas de los pasos que tiene que seguir.
- Si las realiza bajo la supervisión de un experto (maestro, compañero, libro o software).
- Puede realizar las operaciones por memorización de los algoritmo y/o tomando de referencia ejercicios similares a los presentados.

B. Procesos geométrico-algebraicos

Se considera a un estudiante que posee una concepción de proceso en las operaciones básicas con vectores:

- Un estudiante que es capaz de realizar las operaciones básicas con vectores, suma, multiplicación por un escalar, producto punto y producto cruz, algebraica y geométricamente en los espacios de dos y de tres dimensiones, para diferentes valores de sus componentes.
- Puede percibir (conjeturar) las propiedades de los vectores.
- Utiliza las propiedades de los vectores.
- Ejecuta algunas otras operaciones (nuevas acciones), tales como, encontrar las componentes escalares y vectoriales, y vectores unitarios a lo largo de los vectores.
- Es capaz de invertir los pasos de las operaciones.
- Es capaz de expresar el algoritmo de las operaciones en forma verbal.

C. Objetos “Vectores”

Un estudiante que posee una concepción de objeto en las operaciones básicas con vectores:

- Cuando utiliza las operaciones vectoriales en forma algebraica y geométrica de manera adecuada en la diferentes situaciones problemáticas.
- Es capaz de realizar dichas operaciones algebraica y geométricamente en los espacios de dos y de tres dimensiones, teniendo como variables generales las componentes de los vectores.

D. Esquemas

Se considera que un estudiante posee una concepción de esquema cuando ha incorporado los nuevos conocimientos de las operaciones básicas con vectores a esquemas previamente establecidos cuando:

- Cuando puede realizar operaciones vectoriales en forma algebraica, en R^n.

E. Secuencia didáctica

Esta secuencia didáctica se realiza en un ciclo con tres componentes: actividades con la computadora en un laboratorio, trabajo en clase sobre problemas relacionados con las actividades con la computadora y discusión de estos problemas y sus soluciones; y ejercicios con objeto de reforzar los que se ha aprendido y señalar el trabajo futuro.

Las actividades de computadora consisten principalmente en la solución de problemas, estas actividades se presentan a los estudiantes en forma de tareas que conducen a la condición de desequilibrio y les dan una oportunidad de construir una base de experiencias para los conceptos matemáticos y para descubrir ideas matemáticas específicas.

Estas actividades están diseñadas de tal manera que, como resultado de realizarlas, o aun de intentarlas, el estudiante haga abstracciones reflexivas mediante las cuales se efectúan las construcciones mentales de acciones, procesos y objetos apropiados.

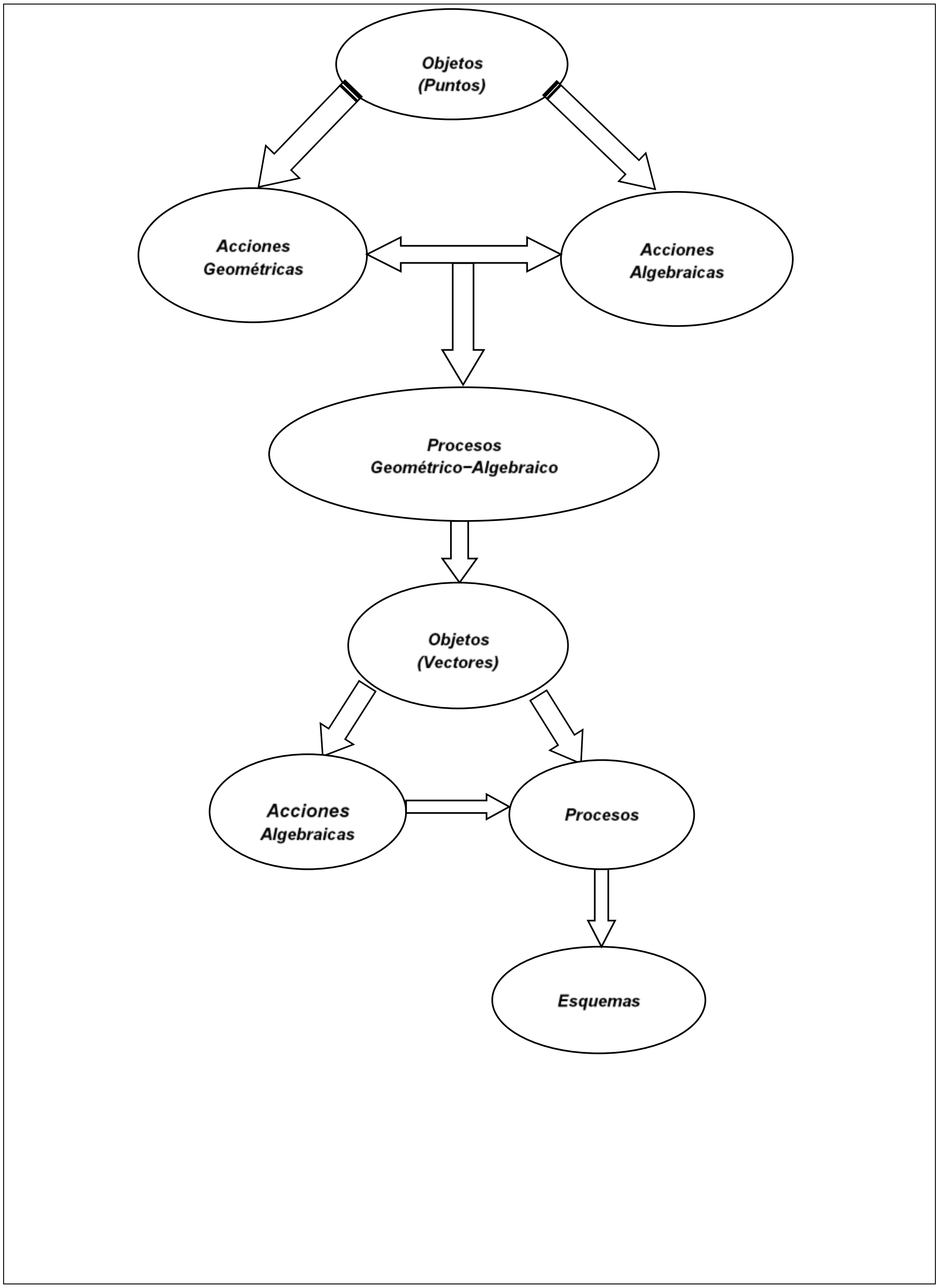

FIGURA 1. Descomposición genética

El trabajo de solución de problemas en el salón de clases continua a esta actividad y las discusiones ayudan a los estudiantes a reflexionar sobre las computadoras y las actividades de salón de clases de manera que puedan llegar a tener consciencia de las estructuras que están construyendo.

IV. CONCLUSIONES

Esta secuencia didáctica se presenta como una alternativa para la enseñanza de las operaciones básicas con vectores, la cual está compuesta por diversas actividades, tales como ejercicios en clase, actividades utilizando software Geogebra, trabajo individual y colaborativo, con el objetivo primordial de que los estudiantes tengan la oportunidad de interactuar y reflexionar directamente con el objeto de conocimiento, a través de dichas actividades.

REFERENCIAS

Asiala, M., Brown, A., J. DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate Mathematics Education. En: J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky. *Research in Collegiate Mathematics Education II*. Providence-USA: American Mathematical Society. pp. 1-23.

Carlson, D., R. Johnson, C., C. Lay, D. & Duan Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the first course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal, 24*, 41-46. Mathematical Association of America.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1999). Teaching and Learning Algebra in First Year of French Science University. *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Educations*. Osnabrück, Alemania. pp. 103-112.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in Linear Algebra at the College Level. En: D. Carlson, C. R. Jonson, A. D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins. *Resources for the teaching of Linear Algebra*. pp. 85-105. Washington: Mathematical Association of America.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, with Particular Reference to the Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New Obervations. En: J. L. Dorier. *On the teaching of Linear Algebra*. pp. 177-189. Dordrecht-NED: Klumer Academic Publishers.

Weller, K., Dubinsky, E., A. McDonald, M., M. Clark, J., Loch, S. & Merkovsky, R. (2000). *An examination of student performance data in recent RUMEC studies*. Disponible en: http://www.math.kent.edu/~edd/Performance.pdf. Consultado el 3 de agosto de 2010. Y listado en el índice en línea: http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html. Consultado el 3 de agosto de 2010.