



# O pensamento Otteano: O fenômeno da complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do conhecimento matemático e sobre os seus fundamentos

E. J. de Arruda, J. B. Paula, M. M. P. Darsie

**ADSCRIPCIÓN**

## ARTICLE INFO

**Received:** XX Mes 2014

**Accepted:** XX Mes 2014

**Keywords:**

Educação Universitária.  
Aprendizagem Permanente.  
Conhecimento Matemático.

**E-mail addresses:**

josearruda@terra.com.br  
Jbcpaula@yahoo.com.br;  
Marponda@uol.com;

ISSN 2007-9842

© 2015 Institute of Science Education.  
All rights reserved

## ABSTRACT

The proposal in this article is to present the "Thinking about complementarity Otteano". A theory in development for over forty years by Professor, Researcher, Mathematician and Philosopher Dr. F. Michael Otte. It is an innovative approach to the interpretation of the process of human cognition, and specifically about the fundamentals and development of mathematical knowledge. Otte has submitted answers to questions about the fundamentals of mathematical knowledge, in a unique way that neither Nominalism, Platonism nor have succeeding respond. Our main goal is to present and discuss, in an introductory perspective on theoretical, conceptual and epistemological theory that it takes as premise and the foundation Charles Sanders Peirce's semiotics and Kant's thought aspects. We observed this theory about complementarity "Otteano" beyond that theoretical foundation interpretive-reflective about the fundamentals of mathematical knowledge, but how presents a dimension of educational-methodological proposition that can be undertaken to mathematical knowledge in the teaching-learning process, as also we understand that it could be taken as a methodological strategy and investigative approach in the scientific research in mathematics education.

A proposta neste artigo é apresentar o "Pensamento sobre complementaridade Otteano", teoria em desenvolvimento por mais de quarenta anos pelo Professor-pesquisador, Matemático e Filósofo Dr. Michael F. Otte. Trata de uma abordagem inovadora à interpretação sobre o processo de cognição humana e especificamente sobre os fundamentos e desenvolvimento do Conhecimento Matemático. Otte tem apresentado respostas a questões sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático, de modo singular, que nem o Nominalismo, nem o Platonismo têm conseguindo responder. Nosso objetivo principal é discorrer, numa perspectiva introdutória, sobre aspectos teóricos, conceituais e epistemológicos dessa teoria que toma como pressuposto e fundamento basilar a Semiótica de Charles Sanders Peirce e o pensamento de Kant. Observamos que a teoria sobre Complementaridade "Otteana" para além de fundamento teórico-reflexivo interpretativo sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático apresenta uma dimensão de propositura didático-metodológica que pode ser empreendida ao conhecimento Matemático no processo de ensino-aprendizagem, como também podendo constituir-se em uma estratégia metodológica à abordagem investigativa em pesquisas científicas em Educação Matemática.

## I. INTRODUCCIÓN

O presente artigo objetiva apresentar de modo introdutório o pensamento de Michael F. Otte sobre Complementaridade.

O professor Otte possui mestrado em Matemática pela Universidade de Erlangen (1963), doutorado em Matemática pela Universidade de Goettingen (1967) e doutorado em Matemática pela Universitaet Munster

(Westfaelische-Wilhelms) (1972). Atuou como diretor e pesquisador no IDM (*Institut für Didaktik der Mathematik*) onde foi o precursor para o desenvolvimento completamente novo e ao crescimento científico da Didática da Matemática na Alemanha. Neste instituto trabalhou de modo interdisciplinar proporcionando experiências bastante modernas em relação à organização de pesquisas e pela busca de soluções à problemas de como inovações científicas podem ser implementadas na sociedade, e, em especial nas escolas.

Atualmente o professor Otte é docente do Programa de Pós-graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIBAN Universidade Bandeirantes, São Paulo). Tem ampla experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: cognição, epistemologia da matemática, história da matemática, e educação matemática. Este professor, matemático, filósofo e pesquisador tem por mais de quarenta anos estudado e desenvolvido a teoria, que neste artigo denominamos de “O Pensamento de Complementaridade Otteano”.

Esta teoria procura de modo inovador apresentar respostas a questões sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático e sobre nosso desenvolvimento cognitivo, que nem o Nominalismo tão pouco o Platonismo tem conseguido responder. Entendemos que o pensamento sobre Complementaridade “Otteano” compreende um viés que o situa como metodologia didática, podendo funcionar como estratégia potencializadora às aprendizagens matemática, podendo constituir-se em uma estratégia metodológica para abordagem investigativa às pesquisas científicas em Educação Matemática.

Por se tratar de uma teoria em desenvolvimento, de caráter inovador e singular, entendemos ser oportuno como também fundamentalmente importante à socialização das reflexões e apontamentos empreendidos até então, tanto para comunidade do Ensino superior em docência ou que se dedica ao desenvolvimento de pesquisa científica relacionados aos fundamentos do Conhecimento Matemático, como àqueles que trabalham com formação para a docência em Matemática. De modo que, possamos ampliar os olhares diferenciados buscando contribuições ao desenvolvimento dessa teoria nesta caminhada intelectual.

A base filosófica que sustenta o pensamento de Michael F. Otte sobre Complementaridade (Pensamento sobre Complementaridade “Otteano”), tem seus fundamentos no pensamento de Kant, principalmente relacionada ao destaque que este dá à atividade, e, esta como sendo a ponte entre o sujeito e o mundo. Desta forma, Otte começou a perceber que a complementaridade deveria ser encontrada na caracterização da atividade, nas práxis. Para Otte, o sentido da complementaridade já estava presente no pensamento Kantiano. De outro modo, o destaque em Kant encontra-se por ser ele elementarmente responsável por um novo direcionamento à epistemologia com sua Revolução Copernicana. Esta que veio a configurar-se como fator decisivo a uma virada linguística na interpretação do desenvolvimento do nosso conhecimento. Kant fala de duas fontes do nosso conhecimento: conceito e intuições. Um trata da espontaneidade do espírito de “ver” as ideias e a outra da receptividade do nosso espírito. Tratando de um ciclo que pode ser tomado como assumindo vários sentidos: receptividade-espontaneidade, construção-observação, experimento-matemática, objeto-método.

Otte sempre observava uma questão nebulosa e problemática nas teorias sobre o desenvolvimento do nosso conhecimento relacionando ao Conhecimento Matemático, e que também sempre imperava em sala de aula, que tratava da relação entre o lado objetivo (do conteúdo da matemática), e o lado psicológico (o social) do conhecimento matemático.

Comumente as teorias até então conduzem a duas visões da matemática: a matemática como linguagem, e, a matemática como atividade. E, esta divisão advém exatamente de dois contextos específicos: o contexto sócio comunicativo e o contexto da filosofia da natureza e da atividade. Para compreender sobre esta relação, Otte empreende uma caminhada de estudos e pesquisas direcionadas à Semiótica. Através da Semiótica Otte descobre a grande vantagem que nos permite lidar e ligar as duas coisas, ou seja, os dois contextos: o objetivo e o social, porque o signo em si mesmo já tem esse papel e função, uma vez que representa alguma coisa para alguém. Otte<sup>1</sup> nos diz que “essa é a maior vantagem da semiótica. A semiótica sempre tem as características próprias da linguagem. E em nosso

---

<sup>1</sup> Fala de Otte em Orientação na data de 24 de abril de 2014.

sistema de símbolos e da nossa linguagem já temos esses dois lados, que são tão difíceis de lidar na Educação”. Entendemos e defendemos que essa dificuldade pode ser superada pelo pensamento sobre Complementaridade “Otteano” que agrega uma perspectiva semiótica. Mas antecipadamente, já destacamos que no entendimento Otteano, a matemática não pode ser confundida com uma linguagem, sobretudo, ele reconhece que sem a linguagem a matemática não é “quase nada”. Então a questão é sobre a semântica e a pragmática da linguagem matemática. A matemática não se refere ao mundo empírico, mas sim a nossas atividades neste mundo empírico. Ela é uma meta-ciência das ciências, de si mesmo, e, da tecnologia.

Assim, Otte encontra na teoria semiótica do cientista e filósofo Charles Sanders Peirce os pressupostos teóricos ao desenvolvimento de sua perspectiva semiótica ao pensamento sobre Complementaridade, não menos porque, segundo Otte, foi Peirce quem genialmente reformulou a epistemologia kantiana em termos semióticos. Alicerçado nessas perspectivas e bases filosóficas é que Otte constrói sua teoria sobre Complementaridade à análise e interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático.

Otte, fala que Peirce foi muito feliz na constatação de que a matemática figura como resultado do nosso raciocínio diagramático. Segundo Otte (2014)<sup>2</sup>:

“Nós vivemos mais em um mundo de signos e possibilidades, do que em um universo de coisas determinadas. Isto significa que o processo de conhecimento é para ser descrito como o processo semiótico de interpretação e, portanto, é uma espécie de processo interativo entre objetos e idéias. Isto é o que queremos dizer com a noção de complementaridade (Otte, 2003, Otte, 2006)” (p. 3).

Tomando a Complementaridade ao Conhecimento Matemático com base na dualidade entre intensão e extensão de símbolos, ele à entende não como dualidade no sentido polarizante. Quando pensamos estaticamente há dualidade, de forma que, é colocada a extensão de um lado e a intensão de outro. Para ele a complementaridade trata de uma interação dinâmica entre esses aspectos no processo de atividade cognitiva, e, que nunca chega a uma síntese final e absoluta.

Para Otte teoria e realidade são tipos lógicos diferentes, e, não existe uma ligação estática e direta entre signos e a realidade. Assim, esse “abismo” que parece existir só pode ser superado de um ponto de vista genético ou evolucionista a partir do qual é concebida sua teoria sobre Complementaridade.

A seguir delineamos aspectos elementares do pensamento “Otteano” e sobre o que ele denomina de “Complementaridade”. Pretendemos estabelecer o início de um diálogo que ambicionamos ser frutífero. Nosso entendimento é o de que, o fenômeno da Complementaridade em sua expressão do que nomeamos como sendo “o Pensamento de Complementaridade Otteano” para além de “lentes” à uma interpretação sobre desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos, figura como uma propositura didático-metodológica ao processo ensino-aprendizagem em Matemática, e, pode se constituir como uma postura metodológica investigativa, pelo aspecto interdisciplinar eminente à dimensão e perspectiva semiótica envolvida, podendo ser empreendido e utilizado em outras áreas do conhecimento, não especificamente à Matemática.

## **I. O FENÔMENO DA COMPLEMENTARIDADE E A INTERPRETAÇÃO “OTTEANA”**

Um dos primeiros no meio acadêmico e científico a utilizar o termo “Complementaridade” à uma perspectiva interpretativa e explicativa à um fenômeno foi Niels Bohr, quando do início da edificação da teoria quântica. Ele apresentou pela primeira vez a sua interpretação do formalismo quântico no ano de 1927 no Congresso Volta, no Lago Como, na Itália. Esta interpretação seria mais tarde publicada em abril de 1928, na Revista *Nature*, sob o título “The Quantum Postulate and the Recent Development in Atomic Theory”.

---

<sup>2</sup> Artigo intitulado “Generalizar é necessário ou mesmo inevitável” de 2014 não publicado até o momento.

Bohr desenvolveu a ideia do “Princípio da Complementaridade”. Tal princípio em mecânica quântica seria a transposição para a física do mesmo princípio de Complementaridade que Hoffding, professor de filosofia de Bohr, teria introduzido em psicologia e filosofia, porém não com esta mesma nomenclatura.

O que nos chama a atenção no pensamento de Bohr, sobre este princípio repousa no fato positivo dele reconhecer a contradição, e, indicar sua existência, não somente circunscrita à física, mas comum a outras áreas de conhecimento, de modo que, este princípio possui um grau de generalidade elevado, funcionando como que um tipo de princípio epistemológico.

De acordo com Otte (2013)<sup>3</sup> Niels Bohr acreditava que, pelo seu princípio de complementaridade ele estaria oferecendo uma interpretação consistente dos fundamentos da física atômica, recompondo, assim, a ruptura seria criada com a formulação de duas teorias anteriores formalmente equivalentes. Entretanto Bohr absolutiza a diferença entre onda e corpúsculo-a dualidade, e, apesar de revelar a contradição, ele a fixa. Já no pensamento sobre Complementaridade “Otteano” a contradição é relativizada.

Bohr pretendia mostrar a “impossibilidade de qualquer separação nítida entre o comportamento dos objetos atômicos e a interação com os instrumentos de medida que servem para definir as condições em que os fenômenos aparecem” (Bohr, 1995, p. 51). Bohr estar a chegar à conclusão de que quando se observa fenômenos atômicos devemos concluir que uma realidade independente no sentido físico comum não pode ser atribuída nem aos fenômenos nem aos modos de observação é o que soa interessante para nossa noção de complementaridade.

Bohr está na realidade destacando a importância que tem a atividade humana na elaboração do conhecimento e que é impossível separar o sujeito de seu objeto. Seriam, deste modo, as condições da atividade, ao invés do objeto como tal e em si mesmo, o que sugere a objetividade de referência. Mente e mundo são mediados ou ligados pelo sistema de atividades (incluindo os seus meios e objetivos). De forma que os aspectos entre o sujeito, atividades e o objeto não devem ser considerados separadamente e sim como um todo, prevalecendo desta forma o aspecto relacional. Para Otte, essa característica do princípio físico da complementaridade ocupa um papel central na questão cognitiva epistemológica do conhecimento humano. É inevitável, portanto estendê-lo aos fundamentos da Educação Matemática.

A Complementaridade no pensamento Otteano não toma os aspectos duais na forma de antíteses absolutamente irreconciliáveis, uma vez que entendemos ser extremamente relativa a diferenciação entre objeto e representação. O entendimento Otteano sobre o fenômeno de complementaridade privilegia uma interpretação dialética, dinâmica e genética. Esta posição relacionada ao fenômeno da Complementaridade assenta-se no pensamento de Engels (1987a) ao destacar que “o reconhecimento de que estes antagonismos e distinções, contudo encontrados na natureza, tem apenas uma validade relativa e que, por outro lado, a sua rigidez imaginada e validade absoluta foram introduzidos na natureza apenas pelas nossas mentes reflexivas [reflexive minds] –este reconhecimento é o cerne da concepção dialética da natureza” (pp. 131-132).

Diferentemente de Bohr, que irá utilizar o sentido da complementaridade tentando resolver tais contradições, em nosso entendimento sobre o fenômeno da complementaridade, e, sobre a complementaridade à matemática não há que se buscar por uma resolução significativa e final para a contradição, ela sempre existirá.

O pensamento de Complementaridade “Otteano” quando assume uma perspectiva dinâmica e dialética, coloca em primeiro plano o papel das contradições dialéticas como sendo o motor de desenvolvimento do nosso pensamento, do pensamento matemático e da ciência, do nosso conhecimento. As contradições internas à própria ciência, como ao próprio corpo de conhecimentos, são fator determinante no desenvolvimento. Não tratam de contradições no seio da realidade objetiva, mas do domínio do próprio conhecimento, e esta é uma expressão de seu caráter histórico. Tais contradições surgem, pois, num momento determinado e muitas vezes não podem ser resolvidas no quadro de teorias já existentes, de forma que, não podemos entendê-las como erro ou até mesmo defeitos. Por estarem ligadas ao desenvolvimento do conhecimento, é o seu reconhecimento que figurará como o caminho ao entendimento e talvez a uma possível e perseguida resolução destas contradições.

---

<sup>3</sup> Manuscrito “Semiotics is All” de 2013 não publicado.

Entendemos que um novo conhecimento não se desenvolve em separação absoluta do velho, mas com base nele (não é *ex nihilo*). O novo conhecimento supera o velho dialeticamente, constituindo um exemplo de negação da negação e revelando a unidade dialética entre continuidade e descontinuidade no processo de construção do conhecimento. E é um processo, é um movimento inesgotável. Como diz Lênine (1989), apresentando o processo de conhecimento como um processo dialético:

O conhecimento é a eterna, infundável aproximação do pensar ao objeto. O *reflexo* da Natureza no pensar do homem deve ser compreendido não «de modo morto», não «abstratamente », *não sem movimento, não sem contradições*, mas de num *processo* eterno de movimento, de surgimento de contradições e de solução delas. (p. 178).

Assim, na matemática, o sentido da complementaridade engloba a própria noção de contradição, que nunca é resolvida, mas de outro modo é a fonte geradora e operacionalizadora do desenvolvimento e processo cognitivo. O fenômeno de complementaridade para Otte é dialético neste sentido, como é dialético o próprio processo do conhecimento.

Também a abordagem complementarista é induzida na impossibilidade de definir a realidade matemática independentemente da própria atividade semiótica. Decorre daí, em particular que palavras ou sinais, por um lado, e, os objetos e metas, por outro lado, não são tão distintos e separados como se poderia supor.

O Discurso parece o conectivo essencial entre sujeito e objeto. Para fazer algo objeto de investigação alguém tem de formar um conceito relacionado a ele. A essência de uma coisa não é senão a essência de uma certa representação de que algo é e a partir de agora que deve ser aproveitada dentro da lógica do seu desenvolvimento racional e, assim, as possibilidades abrem-se (Otte, 2013)<sup>4</sup>.

A linguagem que utilizamos, neste sentido, resulta como produto tanto de aspectos relativos do objeto a que se dirige, quanto, como produto da atividade/metast envolvidas no processo. Na Matemática, nosso objeto adquire existência real a partir de sua representação e entendemos que a objetividade da relação entre objeto e representação repousa na e pela atividade. De maneira que, as escolhas que fazemos no desenvolvimento de uma representação simbólica ou estrutural, são direcionadas pela atividade envolvida. Assim, é que observamos que a diferenciação entre, onde começa e onde termina objeto e representação, é extremamente relativa. Nem por isso assumimos uma posição relativista em relação ao conhecimento, tão pouco, negamos a existência de um modelo objetivo do qual sejam reflexos nossos conhecimentos. Segundo Otte é o fenômeno da complementaridade que nos conduzirá a entender melhor sobre este aspecto.

Para nós na matemática, a Complementaridade simboliza como um fenômeno emergente na eminente relação dinâmica entre objeto e sua representação, e que, sobretudo, não exclui aspectos particulares nem a um e nem a outro, mas os coloca de forma potencializada (a partir do inter-relacionamento) na constituição de ambos, na “Lógica oculta” que se desvela no pensamento relacional-estrutural diagramático da matemática. E, ainda, ressaltamos que, Otte entende por objeto qualquer problema ou tipo de resistência da realidade “contra” a atividade do sujeito e por método (meios) algo que seja apropriado para alcançar a mediação entre o sujeito e o objeto na cognição. E, entre ambos a existência de uma dinâmica inter-relacional, e/ou, interativa.

Foi por assumir a contradição, esta relação dialética que envolve a relação entre teoria e prática, método e objeto, e, entre representação e objeto na atividade matemática; por compreender o processo de nosso desenvolvimento cognitivo como parte de um processo semiótico e consequentemente assumindo uma perspectiva genética ou evolutiva em relação a esse processo, que o professor e pesquisador Michael F. Otte tem estudado, pesquisado e está buscando desenvolver sua teoria numa perspectiva de Complementaridade à interpretação do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos – o Pensamento sobre Complementaridade “Otteano”.

---

<sup>4</sup> Manuscrito “Semiotics is all” de 2013 não publicado.

## II. O PENSAMENTO “OTTEANO” SOBRE COMPLEMENTARIDADE E A PERSPECTIVA SEMIÓTICA

Para Otte a semiótica é a base explicativa sobre os fundamentos e desenvolvimento do Conhecimento Matemático. As coisas não estão em nossa mente, só as representações é que estão em nossa mente, daí a ênfase semiótica. O objeto da matemática, nesta perspectiva é a representação, as generalizações. De modo que, é somente a partir de uma perspectiva semiótica que temos, por exemplo, a base explicativa sobre a relação entre os aspectos duais, como o de extensão e intensão do Conhecimento Matemático.

Mas, segundo Otte, não é somente na matemática (perspectiva fenomenológica do pensamento Otteano) que se aplica a semiótica, mas à qualquer área de conhecimento. Para Otte, todo o conhecimento, qualquer conhecimento é baseado na representação de alguma coisa para alguém. E, Otte encontrou na teoria semiótica de Charles Sanders Peirce os fundamentos ao desenvolvimento de sua teoria. Otte (2014)<sup>5</sup> concorda em absoluto com Peirce, quando este informa que a matemática em especial se caracteriza pelo raciocínio diagramático (relacional-estrutural).

Peirce indica que nosso pensamento é determinado e formulado através de três ingredientes básicos: ícones, índices e símbolos. Ele ainda destaca à três categorias básicas eminentes e determinantes no processo representativo/cognitivo: primeiridade, secundidade e terceridade. Otte ressalta que essas categorias e seus elementos podem ser destacados não somente na matemática e se aplicam inclusive à fenomenologia, e, que ainda podemos procurar identificá-los em qualquer área que sempre encontraremos concretizações dessas relações. Desta maneira, podemos inferir que o pensamento de Complementaridade “Otteano” assume-se interdisciplinar ao incorporar uma perspectiva semiótica.

Ao entendermos nosso conhecimento advindo da relação basilar entre objetos e símbolos (representações), e, tomando todo pensamento vinculado a uma representação, observamos que, os objetos neste sentido apresentam uma existência bem determinada, mas não têm sentido, enquanto que, os signos conseqüentemente os símbolos têm sentido, mas não têm uma existência própria. Mais especificamente, quando analisamos o Conhecimento Matemático, ampliássemos este problema, pois, os próprios objetos da matemática não têm existência real no sentido de nossas percepções sensoriais. São objetos de outro tipo, não tendo existência objetiva, mas, sobretudo, possuem uma objetividade. Eles passam a ter existência na e pela sua representação diante de nossa atividade que é determinada por suas metas e objetivos.

Como entender esta complexa relação? Otte (2012) em seus estudos tem observado e defendido que a concepção nominalista e construtivista da Matemática que entendem que os objetos da Matemática são construções do sujeito ou criações mentais não têm conseguido responder sobre a questão da objetividade e fertilidade da Matemática, e, também não respondem como os matemáticos podem chegar à novos conhecimentos e sobre as ideias que direcionam e guiam essas construções. Neste sentido, o pensamento sobre Complementaridade “Otteano” é singular.

O sentido de complementaridade (Otte, 2012) conduz-nos à compreensão de que ambos (objetos e símbolos) têm fundamental importância para nosso pensamento e ao modo como adquirimos conhecimento, mas, sobretudo entendemos que não há uma relação de dependência fixa e determinada entre eles, ou mesmo uma independência polarizante entre estes dois tipos de elementos: objeto e símbolo; para e na constituição do pensamento e do nosso Conhecimento Matemático em especial. Qualquer distinção que se faça é sempre relativa entre os aspectos de um e outro.

O próprio Bohr, em seus estudos apontava para necessidade de empreendimento interpretativo no sentido da complementaridade em processos linguísticos afirmando que ele se apresentaria, por exemplo, no aspecto relativo à “relação mutuamente exclusiva que existiria sempre entre o uso prático de qualquer palavra e a tentativa de uma sua definição estrita” (Bohr, 1949, p. 52).

Entretanto chegar a uma interpretação de cunho semiótica ao desenvolvimento do nosso conhecimento foi um caminho longo historicamente. Anteriormente ao século XIX todos tentavam lidar como uma separação entre símbolos e objetos, no entanto, a linguagem era sempre tomada como um obstáculo ao conhecimento verdadeiro. De acordo com

---

<sup>5</sup> Fala de Otte em momento de Orientação em 24 de abril de 2014.

Otte (2012) tal separação foi o que resultou num afastamento entre arte, filosofia e ciência e finalmente um dogma da filosofia analítica, que diz o seguinte: “há uma desunião fundamental entre as verdades que são *analíticas*, ou seja, baseadas em significados independentes dos fatos, e verdades que são *sintéticas*, ou baseados em fatos” (Quiné, 1979, p. 27).

Observamos que uma mudança nesta perspectiva pode ser destacada no pensamento de Frege (1848-1925). Esta se contrapõe a lógica Aristotélica, que de uma forma ou de outra, dominava a filosofia ocidental desde o tempo da antiguidade, e ela lançou as fundações para a moderna filosofia da linguagem. No entanto, Frege defendia uma profunda continuidade entre a lógica e a matemática. E foi seu pensamento que fornecer as bases para a filosofia analítica moderna.

Sobretudo, começa a emergir uma filosofia analítica que se destaca devido à substituição da investigação epistemológica, pela concentração na semiótica e na sintaxe das linguagens, promovendo uma “virada à linguística” (Otte, 2012). E, podemos verificar que na linguagem se interagem sentido (que Frege trata como significado) e referência, ou seja, “o como” e “o quê”, fazendo existir sempre o grande desafio de distinguir entre esses dois lados da própria linguagem. Assim essa mesma direção da reflexão começa a ser impressa à exploração dos princípios dos fundamentos do Conhecimento Matemático.

Frege, publica um artigo em 1892 sobre “significado e referência” (nós utilizamos o termo “sentido” para significado), onde analisa sucintamente como se processa de certa maneira uma Complementaridade entre objetos e símbolos. Procedendo a uma análise sobre a identidade na expressão  $A=B$ , dizendo que:

A igualdade desafia a reflexão, dando origem a questões que não são fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos? Ou entre nomes ou representações de objetos? Em minha *Begriffsschrift* assumi a última alternativa. E as razões que parecem apoiar esta alternativa são as seguintes:  $a = a$  e  $a = b$  são, evidentemente, sentenças de valor cognitivo diferente, pois  $a = a$  sustentase *a priori* e, segundo Kant, deve ser denominada de analítica, enquanto que sentenças da forma  $a = b$  contêm, frequentemente, extensões muito valiosas de nosso conhecimento, e nem sempre podem ser estabelecidas *a priori*. A descoberta de que o sol nascente não é novo cada manhã, mas é sempre o mesmo, foi uma das descobertas astronômicas mais ricas em conseqüências. Mesmo atualmente, o reconhecimento de um pequeno planeta ou de um cometa nem sempre é evidente por si. Assim, se quiséssemos considerar a igualdade como uma relação entre os objetos a que os nomes “a” e “b” se referem, então  $a = b$  não pareceria diferir de  $a = a$ , caso  $a = b$  fosse verdadeira”. Desse modo, expressaríamos a relação de uma coisa consigo mesma, relação que toda coisa tem consigo mesma, mas que nunca se dá entre duas coisas distintas. Mas, por outro lado, parece que pôr  $a = b$  quer-se dizer que os signos ou os nomes “a” e “b” referem-se à mesma coisa; e neste caso, a discussão versaria sobre esses sinais: uma relação entre eles seria asserida. Mas tal relação entre os nomes ou sinais só se manteria na medida em que eles denominassem ou designassem alguma coisa. A relação surgiria da conexão de cada um dos dois sinais com a mesma coisa designada. Essa conexão, porém, é arbitrária. Ninguém pode ser impedido de empregar qualquer objeto ou evento arbitrariamente produzido como um sinal para qualquer coisa. Com isto, a sentença  $a = b$  não mais se referiria propriamente à coisa, mas apenas à maneira pela qual a designamos: não expressaríamos por seu intermédio, propriamente, nenhum conhecimento. [...] se, em geral, percebemos uma diferença no valor cognitivo de “ $a = a$ ” e “ $a = b$ ”, isto se explica pelo fato de que, para determinar o valor cognitivo de uma sentença, é tão relevante o sentido da sentença, isto é, o pensamento por ela expresso, quanto sua referência, a saber, seu valor de verdade. Se  $a = b$ , então a referência de “b” é o mesmo que a de “a”, e, portanto, o valor de verdade de “ $a = b$ ” é o mesmo que o de “ $a = a$ ”. Apesar disso, o sentido de “b” pode diferir do sentido de “a” e, portanto, o pensamento expresso por “ $a = b$ ” pode diferir do pensamento expresso por “ $a = a$ ”. Neste caso, as duas sentenças não têm o mesmo valor cognitivo. Se, como anteriormente, entendemos por “juízo” o movimento de um pensamento para o seu valor de verdade, então podemos dizer também que os juízos são distintos (Frege, G., *Lógica e Filosofia da Linguagem*, EDUSP, 2009, pp. 129- 158).

Observamos, no entanto, que o pensamento de Frege dá aos objetos e à lógica dos objetos uma predominância absoluta, reduzindo as intenções ou sentido dos símbolos a um papel secundário ou de dependência para com os seus objetos. Se, de um lado Frege considera a linguagem essencial para análise do pensamento, de outro lado, ainda a toma como obstáculo que devesse ser superado para se chegar à relações lógicas objetivas. Neste sentido, ele destaca haver

uma imperfeição que se relaciona à linguagem, que não é isenta nem mesma da linguagem simbólica da análise matemática. El ainda nos diz que:

Nesta [análise matemática] podemos encontrar combinações de símbolos que parecem referir-se a algo, mas que não têm, pelo menos até o presente, qualquer referência, por exemplo, as séries infinitas divergentes. Isto pode ser sanado, digamos, por meio da convenção de que as séries infinitas divergentes devam referir-se ao número 0. Numa linguagem logicamente perfeita (uma *conceito grafia*), deve-se exigir que toda expressão construída como um nome próprio de maneira gramaticalmente correta a partir de sinais previamente introduzidos designe efetivamente um objeto (Frege, 2009, p. 147).

No entanto Frege, como explicaria Bateson (1972), vive em um mundo Newtoniano, neste se “atribui realidade somente aos objetos, e alcança sua simplicidade pela exclusão de qualquer contexto ou contexto de contexto. De fato, para a exclusão de quaisquer relações meta-perspectivas” (p.329). Desta maneira, essa perspectiva nos conduz a uma teoria descritiva de referência, em cujo extremo, segundo Otte (2012) aponta como a uma ficção leibniziana de um conceito completo de qualquer substância individual.

Acordamos com Otte em que a teoria descritiva de referência é o maior erro que a filosofia da ciência cometeu.

Ela resultou numa crença infundada de que a ciência pode produzir verdades absolutas sobre o mundo, que ela não consegue se relacionar com o discurso cultural, e que, a ciência não consegue distinguir claramente conceitos e objetos.

Diferente de Frege, assumimos a uma perspectiva genética ou evolutiva, de modo que, entendemos ser importante tomar conta do fato de que nosso conhecimento nunca é completo, e está sempre em movimento. E, do ponto de vista genético cognitivo a maneira de se representar qualquer coisa e o sentido dessa representação é muito importante, pois são eles que orientam e dirigem toda a atividade cognitiva (Otte, 2012).

Na relação que envolve intensão e extensão, sentido e referência, um não pode ser conecta ao outro de forma tão rigidamente, como defendia Frege. Uma vez que, a nossa escolha de como representar as coisas não depende apenas das coisas, mas também de nossos objetivos e metas, e, de outro modo, qualquer representação não pode ser escolhida arbitrariamente.

Para Frege não havia uma distinção entre Lógica e Matemática. Sobretudo, observamos que ele considerava nomes não como índices, mas sim como descrições. Em nossa concepção, traçamos uma distinção entre nomes e descrições, e, desta forma visualizamos que a Lógica tem maior aproximação com a Linguagem, sendo mais crítica dos usos linguísticos do que a Matemática. Já na Matemática os índices têm um papel muito maior do que na língua e na Lógica, o que direciona o nosso pensamento a que a matemática não deve ser reduzida nem a uma linguagem, nem tão pouco à Lógica.

Outra coisa, Frege não acreditava que podemos obter conhecimento somente nomeando coisas novas.

Diferentemente de Frege, numa perspectiva semiótica atribuída ao desenvolvimento do Conhecimento matemático, destacamos que mesmo através de designações arbitrárias podemos adquirir sim novos conhecimentos.

Nesta perspectiva, um simples nome trata de um índice e implica em uma afirmação de existência do objeto indicado, e, na Matemática este objeto normalmente pertence a um modelo e não a realidade empírica.

Assim, observamos que, a matemática diferentemente da Lógica não depende de uma metafísica ou pressuposições ontológicas. De acordo com Otte (2012, p. 6):

Como Georg Cantor disse: a essência da matemática pura é sua liberdade! Quanto à Lógica, Frege e Russell acreditavam que ela se refere a um determinado universo e não a modelos diferentes para se escolher. Russell (1967) afirma por exemplo que a Lógica “não deve admitir unicórnios mais do que a zoologia pode admiti-los, pois a Lógica diz respeito ao mundo real tão verdadeiramente quanto a Zoologia, embora com suas características mais abstratas e gerais”. (p. 202)

Foi nas mãos de Russell e Wittgenstein, que a concepção Fregeana de Lógica e Matemática, viria a proporcionar uma nova metafísica e uma nova visão da natureza da argumentação filosófica. E, Russell aprimora a ideia de Frege ao apontar para uma distinção entre nomes e descrições.



Para Russell “uma proposição que contém uma descrição não é idêntica ao que aquela proposição se torna quando o nome é substituído, até mesmo se o nome nomeia o mesmo objeto que a descrição descreve” (Russell, 2007, p.208). No seu entendimento, descrições, diferentemente de nomes, não incluem afirmações de existência.

Se o “x” é um nome,  $x = x$  não é a mesma proposição que “o autor de Waverley é o autor de Waverley”, não importa que nome x possa ser. Assim do fato de que todas as proposições da forma “ $x = x$ ” são verdadeiras não podemos inferir que o “o autor de Waverley é o autor de Waverley”. De fato, proposições da forma “a tal coisa é a tal coisa” não são sempre verdadeiras; é necessário que a tal coisa *exista*. É falso que o atual rei da França seja o atual rei da França, ou que o quadrado redondo seja o quadrado redondo (Russell, 1967, p. 210).

Quando nos deparamos com algo desconhecido toda simbolização a esse algo atribuída será necessariamente arbitrária, mas como pode este fato gerar/produzir conhecimento sobre este “algo”? Este símbolo, dessa “coisa qualquer”, se transforma em um objeto da nossa atividade cognitiva. Passamos a uma análise de sua relação com outros já conhecidos e desconhecidos. Os gregos chamavam essa atividade de “análise” e, sabemos que o poder/força dessa análise cresceu bastante com a invenção da álgebra simbólica na época de Vietá e Descartes.

Observamos que a álgebra simbólica desde Viéta e Descartes aumentou as possibilidades tanto da análise quanto da síntese. A análise comparece estabelecendo equações que representam relações entre objetos conhecidos e desconhecidos e a síntese tentando resolvê-las. Sobretudo, como a possibilidade de resolver as equações depende muito da habilidade ou perspicácia com a qual as equações foram estabelecidas, como também da maneira como as coisas foram representadas, sendo isso determinante e de muito valor, por esta razão os intensões são também de grande importância, existindo e tendo valor independentemente dos objetos e extensões (Otte, 2012, p.21).

Ao designarmos, por exemplo, um objeto desconhecido por “x”, seu significado repousa no uso e na atividade e não sobre sua referência. Temos evidenciado pela álgebra que a maneira de representação e a perspicácia escolhida determinam a possibilidade de resolver um problema ou de construir uma teoria de maneira estrutural.

Em nosso entendimento a Matemática distingue-se da Lógica exatamente pelo fato de que ela tem sim seus objetos, então não podemos assumir uma ligação tão rígida como em Frege entre Matemática e Lógica. Os objetos da Matemática são, no entanto, nada mais do que, hipostatizações ou substancializações de atividades, e, dos próprios pensamentos matemáticos.

Foi assim que, como a geometria não podia definir seus objetos, assistimos ao surgimento da abordagem axiomática, em especial preocupada com os conceitos, mais do que com os objetos. Tal perspectiva conduziu a uma concepção de conceitos matemáticos em termos completamente operacionais ou instrumentais. Um conceito deve ser definido, como Moritz Schlick (1925), disse em relação a axiomatização da geometria de Hilbert, pelo fato de que, algumas conclusões podem ser tiradas sobre o assunto. Com a abordagem axiomática a Matemática parecia tornar-se intencional. E, em sentido do raciocínio matemático isto seria mais importante do que a referência.

Em muitos ramos de pesquisa na atualidade não temos uma teoria (ou sequer conhecemos sobre o objeto a que se deseja conhecer) e o que estamos procurando são relações ou estruturas estáveis ou constantes entre os dados e os resultados, a formalização dessas relações assume papel de objeto. Tais processos que envolve essa hipostatizações ou substancialização quando tradicionalmente codificados em termos de conjuntos-teóricos, têm de ser elaborados de modo a evitar paradoxos. Daí o requisito de descrições por meio de sistemas de axiomas consistentes.

Uma teoria axiomática não é nada mais do que uma estrutura formal. O pensamento axiomático é pensamento sobre a forma e a forma deve ser construída e idealizada. Entretanto, a Lógica faz-se presente e constitutiva do/no pensamento axiomático e na determinação de suas descrições, conceitos e à consistência do sistema de axiomas, o que por vezes dificulta identificar onde começa e termina o pensamento lógico e onde começa e termina o pensamento matemático, reforçando nossa tese da importância de uma abordagem no sentido de Complementaridade do pensamento “Otteano”.

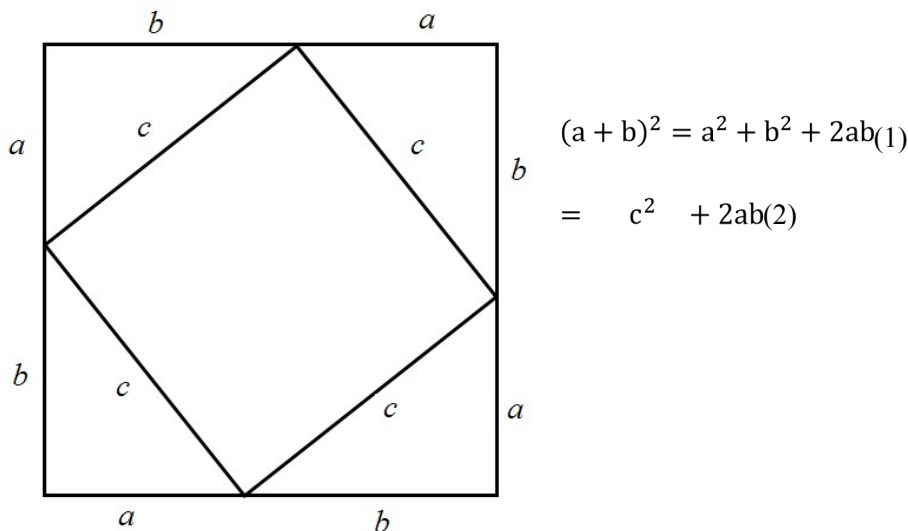
As teorias axiomatizadas modernas tornaram-se, por um lado, teorias intencionais no sentido de que os axiomas são um conjunto de postulados que determinam os intensões dos termos teóricos, mas por outro lado eles constituem as extensões ou referentes. Refletem a própria complementaridade entre a Matemática e a Lógica, entre a Matemática e a Linguagem. Qualquer teoria formal tem várias aplicações destinadas ou modelos não- isomorfos, e o que os axiomas descrevem, em termos de relações entre conceitos indefinidos, são classes de objetos, em vez de objetos particulares

próprios. A este respeito os axiomas matemáticos lembram leis naturais. E como tais, eles têm que ser completados pela indicação do domínio dos objetos a que se aplicam. De forma que uma teoria matemática é, por conseguinte, concebida como um par consistindo de uma estrutura formal, e um conjunto de os modelos ou aplicações pretendidas desses modelos.

As condições que ocorrem nos axiomas de uma teoria podem ser consideradas, por um lado, como dando descrições das suas referências, „atributivamente“, a serem aplicadas àquelas e apenas aquelas entidades com as quais elas são verdadeiras; por outro lado, os termos contidos nos axiomas ou discurso matemático em geral, podem ser utilizados referencialmente“, também. Neste caso, de acordo com Otte (2013)<sup>6</sup> nós não consideramos as expressões da teoria como se referindo a esses objetos, que satisfazem uma dada denotação, mas, como dizendo alguma coisa (podendo ser falso) sobre os objetos fixados independentemente da descrição dada.

Otte (2013)<sup>7</sup> nos lembra que Peano disse em 1923: “A matemática está situada entre a lógica (considerado como um cálculo algébrico) e as ciências experimentais” (p.4). Na perspectiva “Otteana” sobre Complementaridade, nem a matemática nem a ciência moderna são analíticas e explicativas em sentido direto, no entanto, nem devem ser consideradas meros jogos formais. A Matemática não pode ser razoavelmente caracterizada independentemente de suas aplicações. Assim, é que defendemos a necessidade de uma abordagem interpretativa no sentido da Complementaridade.

A prova do teorema de Pitágoras a seguir oferece uma ilustração muito simples desta relativa independência da estrutura e modelo:



**FIGURA 1.** Na equação (1) a expressão do lado esquerdo é simplesmente calculada de acordo com as leis da aritmética enquanto que em (2), uma comparação feita entre (1) e (2) fornece o resultado pretendido:  $a^2 + b^2 = c^2(3)$ .

Assumimos aqui que a estrutura da álgebra poderia ser interpretada com respeito ao modelo de número e variáveis de substituição, isto é, "números desconhecidos" seriam igualmente bons em termos de um cálculo com segmentos geométricos, isto é, variáveis objetais. É a estrutura algébrica que faz com que a dualidade entre a aritmética e a geometria seja algo interessante e fértil. Tratam neste sentido ambas representações complementares. E, só são complementares, pois se referem a uma, e a somente uma, estrutura “essencial” (bem platônico sabemos), têm um sentido único, mas o significado (referência) se revela sempre em suas aplicações.

<sup>6</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de rientação. Fala de Michael F. Otte em momento de orientação.

Na aritmética as variáveis são substitucionais (funcionam como espaços vazios) e na geometria as variáveis são objetais. O pensamento algébrico reflete então a Complementaridade entre esses aspectos (que também podemos destacar entre sentido e referência).

Na álgebra o sentido não trata, como na nossa fala cotidiana, de elementos do conceito (características), no contexto formal da álgebra ou da matemática formal o sentido trata de algumas regras operatórias, de uma estrutura relacional. O único conteúdo das variáveis são as regras, por exemplo, a sintaxe da nossa aritmética: as maneiras de calcularmos. As variáveis objetuais e substitucionais representam este aspecto da Complementaridade que se revela na variável da Matemática, uma Complementaridade entre sentido e referência (significado).

O exemplo que apresentamos, é muito importante, pois, mostra a Complementaridade entre a geometria e a álgebra. É a variável, como objeto principal da matemática, que espelha e reflete a Complementaridade, visto que ela pode significar duas coisas totalmente diferentes. Por isso, Otte afirma que uma teoria axiomática deve ser tomada como um par formado por uma estrutura formal e um conjunto de aplicações destinadas ou modelos.

Geralmente nós estamos acostumados em considerar as variáveis da matemática como substitucionais, como cálculos ou derivações lógicas somente, mas elas também podem funcionar como variáveis objetais. Neste caso as provas matemáticas podem funcionar como experimentos mentais. De modo que podemos, como no exemplo, usar modos geométricos para aumentar a capacidade de calcular. Usamos um tipo em outro, usamos o pensamento estrutural para criar fórmulas e usamos as fórmulas para gerar ainda mais fórmulas.

Segundo Otte (2013)<sup>7</sup>:

[...] então há uma grande diferença da geometria de figuras para geometria da estrutura do espaço (...) então foi isso que inspirou Hilbert para essa visão da axiomática!!! Ou seja, os axiomas são enunciados hipotéticos e não verdades profundas ou fundamentais! Ele só fala assim: se alguma coisa é verdade outra coisa é verdade!

Mas, no pensamento sobre Complementaridade “Otteano” entendemos de modo singular o sentido de verdade, que assume uma perspectiva no sentido complementar entre a Linguagem e a Matemática. Entendemos que as teorias matemática axiomatizadas na forma em que se apresentam hoje em dia necessitam, no que se refere à “verdade”, de uma abordagem interpretativa que compreenda as dimensões semântica (correspondência), sintática (coerência) e pragmática.

Neste sentido a perspectiva de Complementaridade “Otteana” agregada à perspectiva semiótica do pensamento de Peirce, de outro modo, e em nossa interpretação mais adequadamente, sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático e sobre a noção de verdade e falsidade desse conhecimento.

Observamos que na Lógica sempre houve o imperativo clássico de uma teoria de verdade que se baseia na correspondência, ou seja, na semântica, uma concepção que o núcleo já se encontrava em Aristóteles. Para ele, em suma, uma dada sentença seria verdadeira se correspondesse a um estado das coisas reais e seria falsa se fosse o contrário.

Para Tarski (1936), a verdade dependeria de relação entre a linguagem e estados de coisas ou fatos ao qual a linguagem se refere: uma teoria semântica da verdade.

Existem, por sua vez, adeptos da teoria de verdade na coerência, nesta a verdade significa coerência *sistemática*, não se identificando com consistência, mas se confundindo com a propriedade de pertinência ao todo proposicional que traduziria o absoluto –a sintaxe. E, ainda temos uma visão de teoria da verdade pragmatista, segundo esta, em linhas gerais, algo é verdadeiro (uma proposição), se for útil para nós: tendo consequências satisfatórias para alguém, ou seja, se a proposição ou teoria “funcionar” de algum modo. Sobretudo, essas duas últimas, nunca almejam a correção e rigorosidade, a que a primeira se refere.

O pensamento sobre Complementaridade “Otteano” busca empreender o sentido interpretativo explicativo de “verdade” aos fundamentos do Conhecimento Matemático, numa direção e exercício que procura combinar/englobar as três teorias anteriormente delineadas à verdade, devidamente “matematizadas” e somadas as ideias fundamentais da lógica. De forma que, o Conhecimento Matemático, que se configura através do método axiomático formal- abstrato,

---

<sup>7</sup> Fala de Otte em momento de orientação. s.d.

não é por eu entendido como puramente formal, abstrato ou mesmo arbitrário, ele é em certa medida, resultante de nossas relações com o mundo, com o contorno (a própria mente do sujeito é moldada e delineada dentro desse processo e perspectiva). Entendemos que se torna interessante e frutífero o pensamento “Otteano”, que tem o trabalho de desenvolver de um modo rigoroso uma teoria que traga ao sentido de “verdade” englobando os três aspectos/critérios: correspondência, coerência e pragmatista. Também acordamos que em particular, é claro que a teoria pragmatista só pode ser estruturada em nível pragmático, e isto apenas por meio de uma pragmática devidamente matematizada.

E, neste sentido é que trazemos a semiótica de Peirce para complementar nossa interpretação ao Conhecimento Matemático, para o pensamento de Complementaridade “Otteano” a realidade implica em um processo.

Temos a realidade humana, a realidade da teoria, a realidade da natureza, todos concebidos como processos. A Complementaridade à “verdade” também se assume numa perspectiva genética ou evolutiva. Para Otte, a “verdade” tem mais o sentido a que Kant se referia como “ideia regulativa”. Não há uma verdade final e absoluta, temos sempre uma verdade relativa, ou melhor, temos uma verdade que se funda num complexo de verdades que são relativas. E, como apontamos anteriormente, numa perspectiva semiótica, entendemos que o critério da verdade de uma teoria compreenda e se estabeleça a partir de uma tríade: correspondência (que se refere a semântica), coerência (que se refere a sintaxe) e pragmática.

Outro ponto que destacamos à abordagem no sentido da Complementaridade do pensamento “Otteano” refere-se a que para além de tudo o que já refletimos quando aprofundamos nossa análise partindo do significado de um conceito (ou dos conceitos que compõem e das quais são deduzidas as relações descritas numa teoria axiomática), observamos que o seu sentido poderia ser imensamente variável e complexo e não poderia ser descrito definitivamente ou determinado. Otte (2013)<sup>8</sup> aponta que este foi o grande erro da reforma da Matemática Moderna dos anos 70 e 80. Um conceito teórico é essencialmente um processo, dinamizado pela complementaridade de sentido e referência (intensão e extensão de signos!).

De forma que, Otte (2013)<sup>9</sup> tem defendido que “a prática matemática, a qual tem cada vez mais se libertado de agendas metafísicas e ontológicas desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem Complementarista - talvez mais do que qualquer outra área do conhecimento -, a fim de ser entendida corretamente”. E, essa mesma abordagem tem seus fundamentos e alicerces a partir de uma perspectiva interpretativa semiótica.

Sobretudo, segundo Otte (2012), mesmo sendo nossas escolhas e nossas possibilidades, elas dependem também dos meios e instrumentos de nossa atividade, assim ele destaca à existência de um teorema da incompletude da semiótica, uma vez que, a conexão entre objeto e instrumento, entre referência e significado (sentido), entre intensão e extensão, nunca pode ser resolvido de uma maneira definitiva, e isto é o que tem a ver para ele com a Complementaridade. E por elementarmente apoiar-se na atividade, o pensamento sobre Complementaridade “Otteano”, nega em absoluto a uma justificativa metafísica, e, oportunamente relembra a Engels (1987b) ao dizer que:

Para o metafísico, as coisas e os seus reflexos mentais, ideias, são isoladas, são consideradas uma após a outra e separadamente uma da outra, são objetos de investigação fixos, rígidos, dados de uma vez por todas. Ele pensa em antíteses absolutamente irreconciliáveis. [...]. Para ele, uma coisa existe ou não existe; uma coisa não pode ser ao mesmo tempo ela própria e outra quando o piso ou quando nego a frase “uma rosa e uma rosa” dizendo que “uma rosa não e uma rosa”. Mas, esclarece Engels, não devo apenas negar, mas também superar a negação. Devo constituir a primeira negação de forma a tornar possível a segunda. Se triturei um grão de cevada, levei a cabo a primeira parte da acção, mas tornei impossível a segunda. “Cada tipo de coisas tem, portanto, uma forma particular de ser negado de tal forma que de origem a um desenvolvimento e sucede o mesmo com cada concepção ou ideia” diferente. Positivo e negativo excluem-se absolutamente um ao outro; causa e efeito estão em rígida antítese um para com o outro. A primeira vista, este modo de pensamento parece-nos muito luminoso porquê e o do chamado senso-comum. [...]. E o modo de pensamento metafísico, justificável e até necessário como e num número de domínios cuja extensão varia de acordo com a natureza do objeto particular sob investigação, mais cedo ou mais tarde atinge um limite, para além do qual se torna unilateral, restrito, abstracto, perdido em contradições insolúveis.

<sup>8</sup> Manuscrito sem título não publicado.

<sup>9</sup> Manuscrito sem título não publicado.

Na contemplação das coisas individuais, esquece a ligação entre elas; na contemplação da sua existência, esquece o início e o fim da sua existência; do seu repouso, esquece o seu movimento. Vê as árvores, mas não vê a floresta. Para os objectivos do dia a dia, nós sabemos e podemos dizer, por exemplo, se um animal está vivo ou não. Mas, após investigação mais próxima, descobrimos que isto é, em muitos casos, uma questão muito complexa, tal como os juristas sabem muito bem [Engels desenvolve aqui acerca do problema do aborto]. É simplesmente impossível determinar absolutamente o momento da morte, já que a fisiologia prova que a morte não é um fenómeno momentaneamente instantâneo, mas um processo muito prolongado. Da mesma forma, todo o ser orgânico e em todos os momentos o mesmo e não o mesmo; em todo o momento assimila matéria fornecida de fora e vê-se livre de outra matéria; em todo o momento, algumas células do seu corpo morrem e outras se reconstróem de novo [...]. Para além disso, descobrimos após investigação mais profunda que os dois polos de uma antítese, positivo e negativo, por exemplo, são tão inseparáveis como são opostos e que, apesar da sua oposição, se interpenetram mutuamente [...]. Nenhum destes processos e modos de pensamento entra no quadro do raciocínio metafísico [...] (pp. 22-23).

De todo, entendemos que a complementaridade se revela na e pela interação, no inter-relacionamento, basilar e elementar entre Sujeito, Objeto e Representação. Para Otte, por exemplo, quando nos deparamos com os aspectos relativos à intensionalidade e extensionalidade não poderemos resolver os problemas decorrentes dessa relação se não tomarmos conta de um ponto de vista dinâmico, evolutivo: complementar. Nas palavras de Otte (2013)<sup>10</sup>:

Vamos, portanto, conceber a complementaridade em termos da dupla noção de extensão e intensão de termos matemáticos. Esta complementaridade torna-se visível, e torna-se distinta da mera dualidade, somente a partir de uma perspectiva genética, que se concentra no carácter evolutivo do nosso conhecimento matemático. Só a partir dessa perspectiva a relação entre sujeito e objeto, ao invés de o objeto como tal, entra em foco. A noção de complementaridade é, portanto, pertinente, em especial, para qualquer estudo dos fundamentos epistemológicos da educação matemática.

Entender a matemática a partir de uma perspectiva genética implica abandonar noções como "coisas em si", o incognoscível, ou seja, objetos matemáticos, que não são representados, ou idéias como " a matemática como tal" ou a verdade como separados de nossas possibilidades de verificação e comprovação . Nossa visão da matemática, portanto, tem um sabor pragmático, e sua tradição remonta a Peirce, Kant, e, finalmente, Berkeley. Berkeley concordava com Locke a suposição de que o nosso conhecimento se baseia em idéias percebidas pela sensação e, com base nisso, ele comprometeu-se a examinar tudo o que poderia existir. Ele concluiu que tudo o que existe ou é a percepção ou a percepção, ou seja, tanto as nossas ideias ou nós mesmos. Que tal problema? De acordo com Locke, a matéria foi a causa despercebido das nossas ideias. Como, então, pediu Berkeley, não havendo meios para verificar a sua existência, pode-se dizer que a matéria existe? O princípio de Berkeley também poderia ser expresso dizendo que, para que algo de existir para nós, deve ser representado.

Foi assim que Kant e, mais tarde, Peirce entendido por Berkeley, e isso nos traz a idéia de complementaridade, que surge porque os sinais são ao mesmo tempo utilizados referencialmente e atributivamente. O conhecimento é uma atividade, uma imagem espelhada de algum mundo existente, em vez de, e que está na base da conversa frequente de existência em matemática é o fenómeno da objetividade matemática, ao invés de objetos no sentido empírico concreto. Esta visão "pragmática" da matemática poderia ser reformulada da seguinte forma: um conceito matemático, como o conceito de número ou função, não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas não deve ser confundida com qualquer representação também.

De modo que, para Otte (2013)<sup>11</sup> a Complementaridade é mais e muito além do que simples dualidade, pois implica a interação e a relação entre isso que foi distinguido no primeiro passo (pela intuição) e sua representação. Nesta direção, o conceito de evolução e do desenvolvimento são cruciais para entendermos o pensamento sobre Complementaridade "Otteano". E, a citação abaixo conduze-nos a um parâmetro essencial de entendimento sobre esta relação em uma perspectiva genética e evolutiva:

The evolution of the horse from *Eohippus* was not a one-sided adjustment to life on grassy plains. Surely the grassy plains themselves were evolved *pari passu* with the evolution of teeth and hooves of the horses and other

<sup>10</sup> Manuscrito "Semiotics is All" não publicado.

<sup>11</sup> Fala de Michael F. Otte em momento de orientação, 25, abril, 2013.

ungulates. Turf was the evolving response of the vegetation to the evolution of the horse. It is the context which evolves (Bateson, 1972, p. 128).<sup>12</sup>

Destacamos que, encontramos inferência a que a matemática não explica o mundo, no diálogo *Crátilo* de Platão, onde o foco está em questionar e refletir sobre se a língua é um sistema de signos arbitrários (convencionalismo) ou se as palavras têm uma relação intrínseca (naturalismo) com as coisas que eles significam, embora neste diálogo Platão não tome claramente partido entre os convencionalistas e os naturalistas. Esta mesma preocupação existente desde os tempos de Platão sempre permeio a relação entre Linguagem e o Conhecimento, e evidentemente não se exclui da relação entre a Linguagem e a Matemática, de modo algum.

Como entendemos que a linguagem que utilizamos, resulta como produto tanto de aspectos relativos do objeto a que se dirige, quanto da atividade/metapas envolvidas no processo, tal perspectiva, denota e é por nós entendida que, qualquer explicação científica é julgada a partir de um determinado ponto de vista, ou visão do mundo, e no contexto de certa língua. E, a Matemática em particular, sendo por sua natureza exclusivamente preocupada com "meta-dados"-que produz, por vezes, em si - ao invés de objetos, tem que descobrir a "lógica oculta" das nossas histórias sobre o mundo (Paulos, J. A., 1998). Era uma vez o número: A lógica matemática oculta de histórias de Nova York: Basic Books; apud Otte, 2013).

Quando o Cardeal Bellarmino (1542-1621) notificou Galileo do próximo decreto da Igreja, condenando a doutrina de Copérnico de helocentrismo e ordenando que ele a abandonasse como uma explicação do mundo, Galileo usou um argumento dizendo que os matemáticos sempre costumavam argumentar hipoteticamente ou "suppositione ex" apenas: Em primeiro lugar, eu digo parece-me que a sua Reverência e Senhor Galileo agiu com prudência quando do seu conteúdo falando hipoteticamente e não absolutamente (...). Para dizer que as suposições que a Terra se move e o Sol permanece parado ainda conserva todas as aparências celestes melhor do que fazendo excêntricos e epiciclos é falar com excelente bom senso (...). Essa maneira de falar é suficiente para um matemático. (...). Para demonstrar que as aparências são salvas por assumir o sol no centro e na terra nos céus não é a mesma coisa que demonstrar que, de facto, o sol está no centro e a terra está nos céus (Bellarmino, Carta aos pai Foscarini de abril 1615, s. p.)

A matemática, constituindo-se no pensamento diagramático, é segundo Peirce (5.40) “a ciência que tira as conclusões necessárias (apud Otte, 2014, p. 7) ” não verdadeiras. Queremos, com esta citação destacar e evidenciar a dimensão fenomenológica da elaboração “Otteana” relacionado a princípio de Complementaridade e situado como perspectiva teórica à interpretação do desenvolvimento do nosso conhecimento, em especial neste estudo ao Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos. Ainda segundo Otte (2014):

Teorias e obras de arte são formas construídas, são realidades em seu próprio direito. Uma obra de arte é apenas uma obra de arte; uma teoria é apenas uma teoria. Devem ser compreendidas como uma forma sui generis, como um mundo em si mesmo, e não como uma representação pálida ou abstrata do mundo empiricamente dado, antes que possamos investigar seus possíveis significados ou aplicações. Em um diagrama, como em uma teoria ou de uma obra de arte, a síntese da representação é realizada na construção e transformação da representação, que é o processo de generalização. (p. 16).

Otte ainda destaca que, os seres humanos são assediados e perseguidos por esperanças, sonhos, expectativas e ideias. Desta forma, a influência que essas coisas têm sobre a mente do homem não pode de modo algum ser superestimada. E, lembrar de Otte (2014) que “nós vivemos mais em um mundo de signos e possibilidades, do que em um universo de coisas determinadas, isto implica e significa que o processo de conhecimento é para ser descrito como o processo semiótico de interpretação e, portanto, é uma espécie de processo interativo entre objetos e ideias. Isto é o que queremos dizer com a noção de complementaridade” (Otte, 2003; Otte 2006) (p.3). É deste modo que, evidenciamos ser a teoria de Complementaridade “Otteana” promotora de uma “nova” interpretação sobre os fundamentos do conhecimento matemático.

---

<sup>12</sup> A evolução do cavalo de Eohippus não era um simples ajuste unilateral para a vida em planícies gramadas. Certamente as próprias planícies foram evoluindo pari passu com a evolução dos dentes e cascos dos cavalos e outros ungulados. Turf foi a resposta evolutiva da vegetação para a evolução do cavalo. É o contexto que evolui. [nossa tradução]

### III. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De todo, esperamos, ainda que introdutoriamente, possamos ter contribuído para esclarecimentos sobre a perspectiva interpretativa dos fundamentos e do Conhecimento Matemática alicerçada no pensamento sobre Complementaridade “Otteano”. Este pensamento, e, a teoria em desenvolvimento é por nós assumidos tanto como pressuposto teórico interpretativo quanto exercício de postura metodológica investigativa à pesquisa em Educação Matemática, pois no estudo histórico e epistemológico da Educação Matemática está presente o conceito de complementaridade, pois, o sujeito e o objeto estão conectados pelos meios, representações e atividades cognitivas que se relacionam simetricamente e assimetricamente na explicação de um determinado conhecimento, seja ele matemático ou não.

Ao visualizamos a Complementaridade do pensamento “Otteano” como um movimento dinâmico, dialético e processual entendemos que são inúmeros os aspectos em que ela possa ser destacada e em diversas áreas do conhecimento. E, tal caráter interdisciplinar de outro modo é sumariamente relevante no tratamento didático ao Conhecimento Matemático, assim, compreendemos que o Pensamento sobre Complementaridade “Otteano” assume uma dimensão também metodológica para sala de aula. É deste modo que, evidenciamos e entendemos estar sendo promovida uma interpretação inovadora sobre os fundamentos do Conhecimento Matemático.

### REFERÊNCIAS

- Bateson, G. (1972). Steps to an Ecology of Mind. In.: Centeno, Maria João. *O conceito de comunicação na obra de Bateson: interação e regulação*. Covilhã-POR: Universidade de Beira Interior.
- Bohr, N. (1949a). Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics. In.: *Atomic Physics and Human Knowledge*. New York: Dover Publications. (Republicação integral de Atomic Physics and Human Knowledge. p. 39.
- Bohr, N. (1949b). Physical Science and the Problem of Life. In.: *Atomic physics and human knowledge*. New York: Dover Publications. (Republicação integral de Atomic Physics and Human Knowledge). p. 52.
- Bohr, N. (1995). *Física atômica e conhecimento humano*. Ribeiro, V. (Trad.). Rio de Janeiro: Contraponto. p. 51.
- Engels, F. (1987a). *Dialectics of Nature*. Karl Marx-Frederick Engels Collected Works. V. 25. New York: International Publishers.
- Engels, F. (1987b). *Anti-Duhring*. Karl Marx-Frederick Engels Collected Works. V. 25. New York: International Publishers.
- Frege, G. (2009). Sobre sentido e a referência. In: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix-USP.
- Lénine, V. I. (1982). *Materialismo e empiriocriticismo. Notas críticas sobre uma filosofia reaccionaria (1909)*. Lisboa, Moscovo: Edições Avante-Edições Progresso.
- Lénine, V. I. (1989). *Obras escolhidas em 6 tomos. Cadernos filosóficos. T. 6*. Lisboa: Moscovo. Edições Avante-Edições Progresso.

- Otte, Michael F. (1989). *The ideas of Hermann Grassmann in the context of the mathematical and philosophical tradition since Leibniz*. In: *Historia mathematica*. V. 16. USA: Academic Press. Inc. pp. 1-35.
- Otte, Michael F. (1993). *O formal, o social e o subjetivo: Uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática*. Neto, R. F. (Trad.). São Paulo: UNESP.
- Otte, Michael F. (1999). Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico. *Educação Matemática: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática, semestral*, 11-58.
- Otte, Michael F. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean's semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 11 -38.
- Otte, Michael F. (2003). Complementary, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203-228.
- Otte, Michael F. (2006). *Proofs – analysis and continuity*. In: *Foundations of Science*, 11, 121-155.
- Otte, Michael F. (2008). Metaphor and Contingency. In: Radford, L., Schubring, G. & Seeger, F. (Orgs.). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam-NED: Sense Publisher.
- Otte, Michael F. (2011a). Justus and Hermann Grassmann: philosophy and mathematics. In: Petsche, H. J. Lewis, A. C., Liesen, J. & Russ, S. (Eds.). *Hermann Grassmann, from past to future: Grassmann's work in context Grassmann bicentennial conference, September 2009*. pp. 61-70. SUI: Springer Basel AG.
- Otte, Michael F. (2011b). Evolution, Learning, and semiotics from a Peircean point of view. In: *Educ. Stud. Math.*
- Otte, Michael F. (2011c). *A realidade das idéias: uma perspectiva epistemológica para a educação matemática*. Cuiabá-BRA: EdUFMT.
- Otte, Michael F. (2014). *Generalizar é necessário ou mesmo inevitável*. (Manuscrito não publicado datado de 7 abril 2014).
- Pato, A. H. (2012). *Materialismo e idealismo na física do final do século XIX e início do século XX a partir de 'Materialismo e Epiriocriticismo de Lênine. O caso exemplar da interpretação bohriana da Mecânica Quântica*. Dissertação de Mestrado em História e Filosofia das Ciências. Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Lisboa, Portugal.
- Quiné, W. V. (1979). *Essays on the Philosophy*. New York: University of Oklahoma Press.
- Russell. B. (1967). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Routledge.
- Schlick, M. (1925). *Epistemology & Modern Physics*. USA: Garland Publishing Inc.
- Tarski, A. (1956). Der Wahheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica*, 1 (1936). Colection. Logic, Metamathematics. Oxford-UK: Clarendon Press. pp. 261-405.